794. Eigenwertproblem ノ一証明（續）

中野　秀五郎

§6. Measure Operator ノ性質ヲ研究スル前ニ互ニcommutative ナ Projective Operator ノ計算ヲ擴張シテ置ク。

以下 Operator ハ総テ互ニ commutative ナ Projective Operator トス。

P_1, P_2 ニ對シ $P_1 \dotplus P_2$ トハ P_1, P_2 ノ表ハス closed linear mannifold ノ和カラ作ラレ closed linear manifold ノ Projective Operator ヲ表ハスモノトス。即チ P_1 ト P_2 ガ commutative ナルヲ以テ

$$P_1 \dotplus P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$$

又

$$P_1 \dotplus P_2 \dotplus \cdots\cdots = \lim_{n\to\infty} (P_1 \dotplus \cdots\cdots \dotplus P_n)$$

トス，

$P_1, P_2, \cdots\cdots$ ニ對シ

$$P_n' = P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots$$

ト置ケバ

$$P_1' \geqq P_2' \geqq \cdots\cdots$$

ニテ

$$\lim_{n\to\infty} P_n'$$

ガ存在スル。此レヲ

$$\lim_{n\to\infty} P_n' = \overline{\lim_{n\to\infty}} P_n$$

ト定義スル時 同様ニ

$$\lim_{n\to\infty}(P_n P_{n+1}\cdots\cdots) = \underline{\lim}_{n\to\infty} P_n$$

ト定メル。然ル時ハ

定理. $\mathfrak{H}$ ノ任意ノ *element* f ニ對シ

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\|P_n f\| \leqq \|\overline{\lim}_{n\to\infty} P_n f\|$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|P_n f\| \geqq \|\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n f\|$$

従ッテ

トキハ

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n f\| = \|\lim_{n\to\infty} P_n f\|$$

ナリ。従ッテ $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n f) = (\lim\limits_{n\to\infty} P_n) f$ ナリ。

証明

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}(P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots)$$

又

$$P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots \geqq P_n$$

$$\therefore\ \|(P_n \dotplus P_{n+1} \dotplus \cdots\cdots) f\| \geqq \|P_n f\|$$

$$\therefore\ \|\overline{\lim}_{n\to\infty} P_n f\| \geqq \overline{\lim}_{n\to\infty}\|P_n f\|$$

同様ニシテ

$$\|\underline{\lim}_{n\to\infty} P_n f\| \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|P_n f\|$$

§2 ニ於テ *hyper maximal normal Operator* H ニ對シ *measure Operator* E(X) ガ定義デキ此E(X)

ニ對シ

$$(Hf,g)=\int z\,d(E(X)f,g)$$

ナルコトヲ §3 ニテ證明シタ。此ノ $E(X)$ ハ次ノ性質ヲ有ス。

1°. $E(X_1)E(X_2)=E(X_2)E(X_1)$ commutative

2°. X_1 ト X_2 ガ共有点ナケレバ

$$E(X_1)E(X_2)=0$$

3°. $X_1, X_2, \cdots\cdots$ ノ何レノ二ツモ共有点ナケレバ

$$E(X_1+X_2+\cdots\cdots)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots$$

4° $E(X)$ ノ manifold ハ X ヲ含ム open set G ニ對スル $E(G)$ ノ manifold ノ Durchschnitt ナリ。

以上ノ X ハ總テ total additive ナ open set ヲ含ム set class $\{X\}$ ニ屬スルトス。又, $E(X)$ ガ hyper maximal ナルヲ以テ X ガ Gaussian plane 全体ナ時ハ 1. 即チ $E=1$ ナリ。

3° ヨリ $X_1 \subset X_2$ ナラバ $E(X_1)\leqq E(X_2)$

ナルコトガワカル。又 X_1 ト X_2 ガ共有点アレバ

$$E(X_1\dotplus X_2)\geqq E(X_1),\quad E(X_1\dotplus X_2)\geqq E(X_2)$$

$$\therefore\quad E(X_1\dotplus X_2)\geqq E(X_1)\dotplus E(X_2)$$

一方 $$E(X_1\dotplus X_2)=E(X_1)+E(X_2-X_1X_2)$$

$$\leqq E(X_1)\dotplus E(X_2)$$

$$\therefore\quad E(X_1\dotplus X_2)=E(X_1)\dotplus E(X_2)$$

一般ニ

$$E(X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots\cdots) = E(X_1) \dot{+} E(X_2) \dot{+} \cdots\cdots$$

$$E(X_1 \dot{+} X_2) = E(X_1) + E(X_2) - E(X_1, X_2)$$

$$E(X_1) \dot{+} E(X_2) = E(X_1) + E(X_2) - E(X_1 X_2)$$

$$E(X_1 X_2) = E(X_1) + E(X_2) - (E(X_1) \dot{+} E(X_2))$$

$$= E(X_1) E(X_2)$$

即チ

$$E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2)$$

一般ニ

$$E(X_1 X_2 \cdots\cdots) = E(X_1) E(X_2) \cdots\cdots$$

故ニ

$$E(\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} E(X_n)$$

$$E(\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} E(X_n)$$

本節及ビ次節ニテハ separable space 即チ Hilbert. 空間 $\mathfrak{H}$ ニテ考ヘル。

hyper maximal normal Operator H ノ measure Operator ハ從ッテ次ノ性質ヲ有ス。

1° $E(\mathfrak{Z})$ ハ互ニ commutative

2° $E(\mathfrak{Z}_1)$, $E(\mathfrak{Z}_2)$ ニ對シ $E(\mathfrak{Z}_1) \dot{+} E(\mathfrak{Z}_2)$ ガ存在ス。

3° $E(\mathfrak{Z}_1)$ ニ對シ $1 - E(\mathfrak{Z}_1)$ ガ存在ス.

4° 從ッテ $E(\mathfrak{Z}_1)$, $E(\mathfrak{Z}_2)$ ニ對シ $E(\mathfrak{Z}_1) \cdot E(\mathfrak{Z}_2)$ ガ存在ス。

5° $\overline{\lim_{n\to\infty}} E(\mathfrak{Z}_n)$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} E(\mathfrak{Z}_n)$ ガ存在ス。

此ノ如キ性質ヲ有スル Projective Operator ヲ Rink ト云フコトニスル。從ツテ measure Operator ハ Rink ヲナス。然カモ $\mathfrak{H}$ ノ場合ニハ尚次ノ性質ガアル。今任意ノ measurable set $\mathfrak{Z}$ ニ對シ、$\mathfrak{H}$ 内ノ überal dicht ノ Element ヲ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ トスレバ $\| E(\mathfrak{Z}) f_n \|$ ハ $\mathfrak{Z}$ ヲ含ム總テノ open set G ニ對スル $\| E(G) f_n \|$ ノ lower limit ニ等シイコトガ容易ニ證明サレル。從ツテ

$$\| E(G_{n,m}) f_n \| < \| E(\mathfrak{Z}) f_n \| + \frac{1}{m}$$

ナルガ如キ $\mathfrak{Z}$ ヲ含ム open set $G_{n,m}$ ガ存在スル。

今

$$G_n = G_{1,1} ; G_{2,1} \cdot G_{22}\ G_{31}\ G_{32} \cdots\cdots G_{nn}$$

トスレバ

$$G_1 \supset G_2 \supset \cdots\cdots \to G_\delta$$

ナルヲ以テ

$$\lim_{n \to \infty} E(G_n) = E(G_\delta)$$

トナル。然ルニ一方

$$\| E(G_n) f_i \| < \| E(\mathfrak{Z}) f_i \| + \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

ナルヲ以テ

$$\| E(G_\delta) f_i \| \leqq \| E(\mathfrak{Z}) f_i \| \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

又、$G_\delta \supset \mathfrak{Z}$ ヨリ

$$E(G_\delta) \geqq E(\mathfrak{Z})$$

$f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ überal dicht ナルニヨリ

$$E(G_\delta) = E(\mathfrak{Z})$$

ナリ。今 Gaussian plane 上有理數座標ノ点ヲ中心トシ，有理數半徑ノ円ヲ考フレバ此レハ可附番個ナリ。從ツテ此等ノ有限個ノ和ヨリナル点集合モ可附番個。其レヲ

$$C_1, C_2, \cdots\cdots$$

トス。然ルトキハ G_δ ハ常ニ

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, C_{n_i} = G_\delta$$

ナル如クニ表シ得ルヲ以テ

$$E(\mathfrak{z}) = \overline{\lim_{i\to\infty}}\, E(C_{n_i})$$

ナリ。即チ measure operator

$$E(C_1),\ E(C_2), \cdots\cdots$$

ヲ可附番個適當ニ定ムレバ，他ノ任意ノ measure Operator $E(\mathfrak{z})$ ハ其ノ部分列ヲ適當ニトレバ

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, E(C_{n_i}) = E(\mathfrak{z})$$

ナラシメ得ル。コノ如キ性質ヲ有スル Rink ヲ separable ト云フコトヽスル。然ル時ハ

6° measure operator ハ separable Rink ナリト云フコトヲ得ル。

逆ニ又如何ナル separable Rink モ或ルーツノ hyper maximal normal Operator ノ measure Operator ナルコトハ次ノ如クニシテ証明サル。

$\{P\}$ ヲ Projective operator ノ separable Rink トシ

$$P_1, P_2, \text{-------}$$

ヲ überal dicht ノ可附番個ノ operator トスル。

今，$P_1, \text{-----}, P_n$ ヨリ和，積，差．Complement ニヨリテ得ル最小 operator ヲ

$$P_{n1}, P_{n2}, \text{-----}, P_{nm_n}$$

トス。即チ、此等ハ互ニ orthogonal ニ [illegible]

及ビ其ノ Complement ハ $P_{n1}, \text{-----}, P_{nm_n}$ ノ幾ツカノ和トシテ表ハサル。故ニ當然

$$P_{n1} + P_{n2} + \cdots\cdots + P_{n,m_n} = 1$$

ナリ。偖、先ヅ $P_{11} = P_1$ ニ対シ gaussian plane 上ノ半径 1 ナル円 C_1 ヲ對應セシムル。

$P_{21}, P_{22}, \text{-----}, P_{2m_2}$ ニ

對シテハ，夫々半径 $\frac{1}{2}$ ノ円

ヲ若シ、P_{11} ニ含マレレバ内

部ニ含マレザレバ外部ニアル

如クニシテ円ヲ對應セシムル。

以下同様ニシテ，円

$$C_{11}, C_{2,1}, C_{22}, C_{23}, \text{-----}$$

ヲ得ル。此等ハ何レモ交ハルコトナク、半径 $\frac{1}{2^n}$ ノ円ニ對シテハ常ニ

$$P(C_{n+1,1}) + P(C_{n+2,2}) + \cdots\cdots = 1$$

ナリ。次ニ任意ノ open set G ニ對シテハ、G ニ含マレ

ル以上ノ円ニ對スルPノ和ヨリ作ラレ closed linear manifold ノ Projective operator $E(G)$ ヲ對應セシムル。然ルトキハ

$$1°\quad E(G_1)E(G_2)=E(G_2)E(G_1)=E(G_1\cdot G_2)$$

$$2°.\quad E(G_1 \dotplus G_2 \dotplus \cdots\cdots)=E(G_1)\dotplus E(G_2)\dotplus\cdots\cdots$$

$$3°.\quad E(C_{n,m})=P_{n,m}$$

ナルコトガ容易ニ証明サレル。又§1ト同様ニシテ一般 measurable set $\mathfrak{Z}$ ニ拡張スルコトニヨリ measure operator ヲ得ル。コノ measure operator ガ與ヘラレタ Rink ヲ含ムコトハ $P_{n,m}$ ヲ含ムコトヨリ明カナリ。又 measure operator $E(\mathfrak{Z})$ ハ

$$E(\mathfrak{Z})=E(G_\delta)$$

ナル G_δ ガ存在シ、open set ノ measure operator ハ Rink ニ含マレルヲ以テ其ノ極限 operator タル $E(G_\delta)$ モ亦 Rink ニ含マル。

故ニ與ヘラレタル Rink ハ

$$(Hf,g)=\int z\,d(E(\mathfrak{Z})f,g)$$

ナル normal operator ノ measure operator ト一致スル。

然カモ円ヲ有界ノ所ニ作レバ、H ハ bounded ナリ。

故ニ

定理. Projective Operator ノ separable Rink ニ對シテハ其レヲ measure operator ニスル

hyper maximal normal operator ガ無限ニ多ク存在ス。

次ノ定理ハ重要ナリ。

定理. Rink $\{P\}$ ノ各々ト commutative ニシテ $\{P\}$ ニ含マレザル Projective Operator F ニ對シテハ、常ニ $\{P\}$ ノ各々ト commutative ニシテ F ト commutative ナラザル Projective Operator ガ存在ス。從ツテ $\{P\}$ 各々ト Commutative ナ總ベテノ Projective operator ニ commutative ナ Projective Operator ハ $\{P\}$ ニ含マレル。

證明. F ノ Manifold 内ノ überal dicht ナ element ヲ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ $1-F$ ノ Manifold 内ノ überal dicht ナ element ヲ $g_1, g_2, \cdots\cdots$ トスル。

然ルトキ、一定ノ f_i, g_j ニ對シ、P ヲ $\{P\}$ ノ總テニ動カシテ得ル element

$$P(f_i + g_j)$$

ノ總ベテヨリ作ラレル closed linear Manifold ヲ $\mathfrak{M}_{i,j}$ トシ、其ノ Projective Operator ヲ E_{ij} トスレバ E_{ij} ハ P ト Commutative デアル。如何トナレバ $P_1, P_2 \in \{P\}$ ナレバ又 $P_1 \cdot P_2 \in \{P\}$ トナルヲ以テナリ。F ガ若シ E_{ij} ノ總テ $\left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\cdots\cdots \\ j=1,2,\cdots\cdots \end{smallmatrix}\right)$ ト Commutative ナリトスレバ

$$F(f_i+g_j)=P_{i,j}(f_i+g_j) \qquad P_{i,j}\in\{P\}$$

ナル $P_{i,j}$ が存在ス．故ニ $Fg_j=0$ ヨリ

$$Ff_i=P_{i,j}(f_i+g_j)$$

$$\therefore\ Ff_i=FP_{i,j}(f_i+g_j)=FP_{ij}f_i=P_{ij}Ff_i$$

$Ff_i=f_i$ ナルニヨリ

$$f_i=P_{ij}f_i$$

$$\therefore\ Ff_i=f_i+P_{ij}g_i \qquad\qquad \therefore\ P_{ij}g_j=0$$

今

$$P_j=P_{1j}\dotplus P_{2j}\dotplus\cdots\cdots$$

トスレバ $P_j\in\{P\}$ ニシテ

$$P_jg_j=0$$

$$P_jf_i=f_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots)$$

$f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ F ノ manifold 内ニテ überal dicht ナルヲ以テ

$$P_jF=F$$

ナリ。

又 $\quad P_0=P_1P_2\cdots\cdots$ トスレバ $P_0\in\{P\}$ ニシテ

$$P_0F=F$$

$$P_0g_j=0 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots)$$

g_j ハ $1-F$ ノ manifold 内ニテ überal dicht ナルニヨリ

$$P_0(1-F)=0$$

$$\therefore\ P_0=P_0F=F$$

従ツテ F ガ $\{P\}$ ニ含マレルコトトナル。

§7. §5 ニ於テハ、hyper maximal ナ measure Operator $E(z)$ ニ對シ、$f(z)$ ヲ殆連續函數トスルトキハ

$$(Hf, g) = \int f(z)\, d(E(z)f, g)$$

ニヨリ一ツノ hyper maximal normal operator ガ與ヘラレルコトヲ述ベタ。此処デハ如何ナル場合ニ hyper-maximal normal Operator H ガ上ノ如キ積分ニテ表ハサレルカヲ考ヘル。

定理. hyper maximal normal operator H ガ measure operator $E(z)$ ニ關シ，以上ノ如キ積分ノ形ニテ表ハサレルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ H ノ measure Operator $F(z)$ ノ Rink ガ $E(z)$ ノ Rink ニ含マレルコトトデアル。

證明. 今

$$(Hf, g) = \int f(z)\, d(E(z)f, g)$$

ナル形ニ表ハサレタリトスル。然ルトキハ $H^k f$ ガ sinnvoll ナル f ニ對シテハ

$$\left\| \left(\frac{H - z_0}{r_0} \right)^k f \right\|^2 \quad \int \left| \frac{f(z) - z_0}{r_0} \right|^{2k} d\| E(z) f \|^2$$

故ニ

$$\left\| \left(\frac{H - z_0}{r_0} \right)^k f \right\| \leqq \| f \| \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル f ハ

$$\left|\frac{f(z)-z_0}{r_0}\right| \leqq 1$$

ナル点 z ノ集合 z_0 (此レハ $f(z)$ ガ殆連続ナルヲ以テ Lousin ノ定理ヨリ $\|E(z)f\|^2$ ニ関シ measurable)

従ッテ z_0 ヲ中心, 半径 r_0 ノ円 $\overline{C_0}$ ニ對シテハ

$$F(\overline{C_0}) \leqq E(z_0)$$

又, $E(z_0)f = f$ ナル element ハ明カニ條件ニ適スルヲ以テ

$$F(\overline{C_0}) = E(z_0)$$

然ルニ $F(z)$ ハ $F(\overline{C_0})$ ノ部分列ノ極限ナルヲ以テ Rink $\{F(z)\}$ ハ $\{E(z)\}$ ニ含マレル。

逆ニ $\{F(z)\}$ ガ $\{E(z)\}$ ニ含マレタトス。

$$(Hf, g) = \int z\, d(F(z)f, g)$$

充分大ナル円ヲ C トスレバ

$$(HF(C)f, g) = \int_C z\, d(F(z)f, g)$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n} z_i (F(z_i)f, g)$$

$\{F(z)\} \subset \{E(z)\}$ ヨリ

$$F(z_i) = E(w_i)$$

ナル $E(w_i)$ ガ存在スル。

$$f_n(z) = z_i \qquad \text{in } \mathrm{W}_i$$
$$= 0 \qquad \text{他ノ点ニテハ}$$

ナル函数ニ對シテ、$f_n(z)$ ハ明カニ measurable 有界、従ッテ殆連続ニシテ

$$\sum_{i=1}^{n} z_i (F(z_i) f, g) = \int f_n(z)\, d(E(\mathrm{W}) f, g)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f_c(z)$$

トスレバ

$$(HF(C) f, g) = \int f_c(z)\, d(E(\mathrm{W}) f, g)$$

$C \to \infty$ ナラシムレバ $f_c(z) \to f(z)$ ナル $f(z)$ 存在スルヲ以テ

$$(Hf, g) = \int f(z)\, d(E(\mathrm{W}) f, g)$$

又 Definitionsbereich ガ

$$\| Hf \|^2 = \int |f(z)|^2\, d\| E(\mathrm{W}) f \|$$

ヨリ定マル。

此ノ定理ヨリ次ノ Neumann ノ定理ガ直チニ得ラレル。

定理. hyper maximal Operator H_1, H_2, ------ ガ互ニ commutative (commutative ノ定義ハ如何ナル方法ニヨルモ結局ハ其ノ measure

Operator同志ガ commutative ナルコトニ帰着スル）ナルトキハ一ツノ measure Operator $E(z)$ ガ存在シテ

$$(H_i f, g) = \int f_i(z)\, d(E(z) f, g)$$

ナル形ニ表ハサレル。

証明. $H_1, H_2, \ldots$ ノ measure Operator ナルヲ以テ結合其レ等ノ全体ニテ作ル Rink モ separable ナリ。其ノ Rink ヲ

定理. hyper maximal Operator H ガ N ノ函数トシテ表ハサレルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ H ガ N ト commutative ナ總ベテノ Projective Operator ト commutative ナルコトナリ。

証明. 前節ノ定理ニヨリ H ノ measure operator ノ Rink ガ N ノ其レニ含マレルコトヽナルカラデアル。

此ノ定理 Neumann, Riess, 三村氏等ニヨリテ証明サレテキル。

§6, §7ニ於テハ §7ノ最初ノ定理以外ハ separable ナシデハ今ノ所未ダ出来マセン。之レハ Rink ノ separable ヲ用ヒテ居リマスノデ、若シ之レニ換レモノガ考ヘラレヽバ一般ノ場合ニモ出来マス。目下研究中。