

795. Eigenwertproblem 1 - 証明 (訂正)

中野 秀五郎

(1°) §7 の訂正. §7 = 7 Neumann の定理より, 可
附番個, 互 = commutative + normal opera-
tor H_1, H_2, \dots の適當 + ルーツ / normal operator
の函数である所, 可附番個は不必要である. 如何
ト + レバ Commutative Ring の常 = separable
+ ルコトが次ノ如ク = シテ証明せらる.

今 $\{F\}$ を Projective Operator, Com-
mutative Ring とす. f_1, f_2, \dots を
Hilbertspace \mathcal{H} 上で überall dicht + リト
ス. 然レテ $\{F\}$ の總テ, $F =$ 對シテ

$$(\|Ff_1\|^2, \dots, \|Ff_n\|^2)$$

+ ル n 次元空間, 点集合ヲ考へルト, n 次元空間
は separable + ルヲ以テ, 可附テ überall
dicht + ル様ニ $F_{n,1}, F_{n,2}, \dots$ が存在ス. 然
ルトキハ

$$F_{i,j} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots \\ j=1,2,\dots \end{pmatrix}$$

+ ル Operator が $\{F\} =$ 對テ überall dicht である.
如何ト + レバ $\{F\} =$ 属スル任意, $F =$ 對シテ

$$|\|F_{m,j}f_i\|^2 - \|Ff_i\|^2| < \epsilon_n \quad (i=1,2,\dots,n)$$

= シテ, 且ツ

$$\|Ff_i - fh_i\| < \varepsilon_n \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ナル f_1, f_2, \dots 内、 $fh_i = 0$ 対シテモ

$$|\|F_{m,j} f_{h_i}\|^2 - \|Ff_{h_i}\|^2| < \varepsilon_n$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

ナルガ如キ $F_{m,j}$ ガ存在ス。此、 $F_{m,j}$ ヲ $F^{(n)}$ ト記セバ、上ノ三ツノ不等式ヨリ

$$|\|F^{(n)} f_i\|^2 - \|Ff_i\|^2| < \varepsilon_n$$

$$|F^{(n)} Ff_i - F^{(n)} fh_i| < \varepsilon_n, \quad |Ff_i - Ffh_i| < \varepsilon_n$$

$$|\|F^{(n)} fh_i\|^2 - \|Ffh_i\|^2| < \varepsilon_n$$

従ツテ

$$|\|F^{(n)} Ff_i\|^2 - \|F^{(n)} fh_i\|^2| < \varepsilon_n$$

$$|\|Ff_i\|^2 - \|Ffh_i\|^2| < \varepsilon_n$$

故ニ

$$|\|F^{(n)} Ff_i\|^2 - \|Ff_i\|^2| < 3\varepsilon_n$$

又

$$\|F^{(n)} Ff_i\|^2 > \|Ff_i\|^2 - 3\varepsilon_n$$

$$\therefore \|F^{(n+1)} Ff_i\|^2 > \|Ff_i\|^2 - 3\varepsilon_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|F^{(n)} Ff_i\|^2 + \|F^{(n+1)} Ff_i\|^2 &> 2\|Ff_i\|^2 \\ &\quad - 3(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) \end{aligned}$$

即チ、

$$\begin{aligned} &| (F^{(n)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) Ff_i\|^2 + \| (F^{(n+1)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) Ff_i\|^2 \\ &\quad + 2\|F^{(n)} F^{(n+1)} Ff_i\|^2 \geq 2\|Ff_i\|^2 \\ &\quad \quad \quad - 3(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) \end{aligned}$$

然レニ

$$\| (F^{(n)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) F f_i \|^2 + \| (F^{(n+1)} - F^{(n)} F^{(n+1)}) \|^2 \\ + \| F^{(n)} F^{(n+1)} F f_i \|^2 \leq \| F f_i \|^2$$

$$\therefore \| F^{(n)} F^{(n+1)} F f_i \|^2 \geq \| F f_i \|^2 - 3(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1})$$

同様 = シテ

$$\| (F^{(n)} F^{(n+1)} \dots) F f_i \|^2 \geq \| F f_i \|^2 - 3(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots)$$

$$\therefore \left\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} \right) F f_i \right\|^2 \geq \| F f_i \|^2 - 3(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \dots)$$

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots$ 7 収斂スル如ク取レバ

$$\left\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} \right) F f_i \right\|^2 \geq \| F f_i \|^2 \quad (i=1, 2, \dots)$$

然レバ =

$$\left\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} \right) f_i \right\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \| F^{(n)} f_i \|^2 = \| F f_i \|^2$$

+ ルベキ = $\exists 0$

$$\left\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} \right) f_i \right\|^2 = \| F f_i \|^2$$

f_i 7 *überal dicht* + $v = \exists 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} = F$$

故ニ、 $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots$ 7 $\{F\}$ 内ニ *überal dicht*

+ v .

2° §6 = 於テ Ring $\{E\}$ 7 Commutative = シテ $\{E\}$

= 合マレザル F = 對シテ $\{E\}$ 7 Commutative

= シテ F 7 Commutative + フザル P が存在スル。

トイフ定理ノ証明中ニテ、 F 7 manifold 内ノ

element f_i , $1-F$ 7 manifold 内ノ element

g_i = 對シ、 E 7 $\{E\}$ 7 總テ = シタ時 = $E(f_i + g_i)$

ヨリ作ラレル closed linear manifold ト F トガ
commutative ナル時ニハ

$$F(f_i + g_i) = E_{i,j} (f_i + g_j)$$

ナル $E_{i,j}$ ガ存在ストセシガ此レハ正シカラズ。故ニ次
ノ如クニ改ム。 $\{E\}$ ノ §7 ノ定理ニテ bounded
Hermitian, measure Operator $E(x)$ トス
レ。 (normal) ノ場合ヲ証明セシガ用、カハリニ実
軸上ノ線分ヲ取レバ Hermitian トナル)

Stone ノ定理ヨリ、 $E(x)(f_i + g_j) =$ 作
ラレル closed linear manifold 内ノ任意ノ
element f ハ

$$(f, g) = \int \Phi_f(x) d(E(x)(f_i + g_i), g)$$

ニテ與ヘラレルガ如キ measurable function
 $\Phi_f(x)$ ガ存在ス。コノ定理ヨリ、 F ト $E(x)(f_i + g_i)$
ヨリ作ラレル closed linear manifold, Pro-
jective Operator ガ Commutative ナルバ (後
者ガ $\{E\}$ ト Commutative ナコトハ明カ)

$$(F(f_i + g_i), g) = \int \Phi(x) d(E(x)(f_i + g_i), g)$$

ナル $\Phi(x)$ ガ存在ス。故ニ

$$\begin{aligned} \|F(f_i + g_i)\|^2 &= \int \|\Phi(x)\|^2 d\|E(x)(f_i + g_i)\|^2 \\ &= \int \|\Phi(x)\|^2 d\|E(x)f_i\|^2 + \int \|\Phi(x)\|^2 d\|E(x)g_i\|^2 \end{aligned}$$

然ルニ、 $F(f_i + g_i) = Ff_i$. g ノ所ハ Fg ヲ入レテ

$$(Ff_i, g) = \int |\Phi(z)|^2 d(E(z)f_i, g)$$

従ツテ

$$\|Ff_i\|^2 = \int |\Phi(z)|^2 d\|E(z)f_i\|^2$$

故ニ

$$\int |\Phi(z)|^2 d\|E(z)g_i\|^2 = 0$$

$\|\Phi(z)\|^2 > 0$ ナル z ノ集合ヲ Z_0 トスレバ、従ツテ

$$\|E(z_0)f_i\|^2 = 0 \quad \therefore E(z_0)f_i = 0$$

又

$$((1-E(z_0))Ff_i, g) = \int_{Z_0 \text{ Complement}} |\Phi(z)|^2 d(E(z)f_i, g) = 0$$

$$\therefore (1-E(z_0))Ff_i = 0$$

$$\therefore E(z_0)f_i = f_i \quad (\because Ff_i = f_i)$$

此ノ $E(z_0)$ ヲ $E_{i,j}$ トスレバ

$$E_{i,j}f_i = f_i, \quad E_{i,j}g_j = 0$$

トナリテ、後ハ前ノ証明ニテ可ナリ。

§6, §7ニテハ Hilbert spaceノミニテ考ヘシニ、

一般 Euclid spaceニ對シテハ Ringノ separabilityヲ次ノ如クニ定義スレバ、§6, §7ノ大部分ハ

同様ニシテ拡張ヲヤル。

定義. Ring $\{E\}$ ガ separableトハ $\{E\}$ ノ

中 = τ 高々可附番個, E_1, E_2, \dots , τ 取ルトキ, E_1, E_2, \dots τ 合ム最小 Ring が $\{E\}$ ト一致スルコトナリ。

measure operator $E(\Sigma)$ が separable +
レコトハ中心, 半径が有理数ナルが加キ用 τ 考 τ レバ明
カナリ。又 Ring $\{E\}$ ハ必ズシテ separable τ ナ
イコトハ, orthogonal system $\{f\}$ が可附以上
ナルトキ此等ヨリ作ラレル Ring ハ明カ = separable
ナラズ。

又此処 = τ 訂正セル定理ノ証明ハ, ウマク行カズ
目下研究中ナリ。