801. 球面カラノ寫像ノAbbildungsklasse

安倍　亮（東大）

空間 Y ノ Fundamentalgruppe $\pi_1(Y)$ ハ円周 S^1 ノ Y ヘノ abbildung $\varphi \in Y^{S^1}$ ノ abbildungsklasse カラ成ル。但シコノ場合、S^1 上ニ定点 x_0、Y 上ニ定点 y_0 ヲトッテ、$\varphi(x_0) = y_0$ ナル φ ノミヲ考ヘ、シカモ $\varphi_t(x_0) = y_0$ ガ満足サレタマヽデ φ_t ヲ連続的ニ $t=0$ カラ $t=1$ マデ変ヘルトキ、φ_0 ト φ_1 ガ同ジ Klasse ニ属スルトスルノデアル。カヽル Abbildungsklasse ヲ Abbildungsklasse rel. $(x_0\, y_0)$ ト云フコトニシヨウ。ソレガ $\pi_1(Y)$ ノ一ツ一ツノ元ヲアラハス。

rel. $(x_0\, y_0)$ ナル制限ヲ除キ、S^1 ノ Y ヘノ Abbildung ノ通常ノ Abbildungsklasse ヲ考ヘレバ、ソレハ何デ[illegible]サレルカ？ 答ハ簡単デアル。先ヅ Y^{S^1} ノ任意ノ Abbildungsklasse ハ $\varphi(x_0) = y_0$ ヲ満足スル φ ヲ含ミ、シタガッテ Abbildungsklasse rel. $(x_0\, y_0)$ ヲ一ツ以上含ンデヰルコトニ注意スル。サテ、$\pi_1(Y)$ ノ二ツノ元 α_0, α_1 ヲ代表スル Abbildungen $\in Y^{S^1}$（ソレヲ再ビ α_0, α_1 ト書ク）ガ homotop デアルトスル。α_0 ヲ α_1 ニ deformieren スル間ニ x_0 ノ像点ガエガク y_0 ヲ出テ y_0 ニ帰ル道ヲ w トスル。コノトキ

$$\alpha_0 = w \alpha_1 w^{-1}$$

ナルコトハ容易ニ分ル。逆ニコノ式ガ成立テバ、α_0 ト α_1 ハ

homotop デアル。

從ッテ

「$\pi_1(Y)$ ハ konjugierte Elemente ノ Klasse ニ分レル。ソノ各々ノ Klasse ガ S^1 ノ Y ヘノ Abbildungsklasse ニ一對一ニ對應スル」

同ジヤウナコトガ二次元以上ノ Sphäre カラ Y ヘノ Abbildung ニ就テモ云ヘル。之レニ就テハ Eilenberg ガ Fundamenta XXXII ニ論ジテヰル。*) 今ソレヲ大体説明スルト：

n 次元ノ Homotopiegruppe $\pi_n(Y)$ ハ S^n カラ Y ヘノ Abbildungsklasse rel. (x_0, y_0) カラ成ル。ソノ二ツノ元 α_0, α_1 ガ rel. (x_0, y_0) デナク單ニ homotop ナ條件ハ、α_0 ヲ α_1 ニ deformieren スルトキ x_0 ノ像点ガエガク道 w ニヨッテキマル。

$$\alpha_0 = w(\alpha_1)$$

ナル関係デ α_0 ト α_1 トガ結ビツケラレテヰルコトデアル。$w(\ \ )$ ハ $\pi_1(Y)$ ノ元 w ニヨッテ決定サレル・$\pi_n(Y)$ ノ或ル Automorphismus デアル。カヽル Automorphismen デ互ニ移リ得ル $\pi_n(Y)$ ノ元ノ Klasse ト Y^{S^n} ノ Abbildungsklasse ガ一對一ニ對應スル。

Eilenberg ハ Y ノ universelle Überlagerung

---

*) S. Eilenberg: Fundamental groups and higher homotopy groups [Fund. Math. XXXII (1939) 167 175]

$\tilde{Y}$ヲ考ヘ，w ニ相當スル $\tilde{Y}$ 自身ノ Decktransformation ニヨツテ Automorphismus $w(\ )$ ヲアラハシタ。コンデハ考ヘ方ヲ変ヘテ π_n ト π_1 ヲ共ニ含ム一ツノ群 K_n ヲ作リ，$w(\ )$ ガ

$$w(\alpha) = w\alpha w^{-1}$$

ナル具体的ナ Transformation ノ形ニカケルコトヲ述ベル。シタガツテ $n=1$ ノトキト analog ナアラハシ方ニナル譯デアル。加之コノトキ考ヘル群 $K_n(Y)$ ガ，夫レ自身 topologisch ナ意味ヲモツテキル。

1. 順序トシテ Homotopiegruppe ノ定義カラ書ク。X, Y ガ metrisch Räume，X ガ kompakt ナルトキ，Y^X ヲ以テ X カラ Y ヘノ stetige Abbildungen 全体ノ作ル metrischer Raum ヲアラハス。X' ヲ X ノ閉部分集合，y_0 ヲ Y ノ一点トシ，$\varphi(X') = y_0$ ナル $\varphi \in Y^X$ ノ全体ヲ $Y^X(X' y_0)$ ト書ク。

考ヘルノハ，X，X' ガ Polyeder，Y ガ Zusammenhängend デ且ツ（Homotopie ノ意味デ）lokal zusammenhängend ナ場合デアル。（但シ lokal zusammenhängend トハ爰デハ，$y \in Y$ ノ任意ノ近傍 U_y ヲトルトキ，近傍 $V_y \subset U_y$ ヲ十分小サクトレバ，V_y ニ含マレル n-Sphäre S^n $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ノ任意ノ Bild ガ U_y ノ中デ一点ニ縮メラレルコトデアルトスル。）コノトキ Y^X 及ビ $Y^X(X', y_0)$ モ lokal zusammenhängend デアル。ソノ Komponente ガ夫々 X カラ Y ヘノ單ニ Abbildungsklasse 又ハ Abbildungsklasse rel. $(X' y_0)$ デアル。特ニ konstante Abbildung $k_0(X) = y_0$ ヲ含ム Komponente ヲ Y_0^X 及ビ $Y_0^X(X' y_0)$ ト書ク。

$x_0 \in S^{n-1}$, $Y_0^{S^{n-1}}(x_0\ y_0)$ ノ Fundamentalgruppe ヲ Y ノ n-te Homotopiegruppe トイヒ $\pi_n(Y)$ ト書ク。konstante Abbildung $k_0 \in Y_0^{S^{n-1}}(x_0\ y_0)$ ヲ出テ k_0 ニカヘル $Y_0^{S^{n-1}}(x_0\ y_0)$ ノ道ハ

$$\varphi \in Y^{S^{n-1}\times[0,1]}\left(S^{n-1}\times 0) + S^{n-1}\times(1) + x_0\times[0,1],\ y_0\right)$$

デアラハサレル。*) $S^{n-1}\times[0,1]$ ニ於テ $S^{n-1}\times(0)$ ヲ一点 ξ_0 ニ, $S^{n-1}\times(1)$ ヲ一点 ξ_1 ニ縮メルト, S^n ガデキル。コノ Abbildung ヲ $\psi_1 \in S^{n\,S^{n-1}\times[0,1]}$ トスル。$\psi_1(x_0\times[0,1])$ ハ S^n 上デ ξ_0, ξ_1 ヲツナグ弧 $\overline{\xi_0\xi_1}$ ヲ作ッテ来ル。S^n 内デ $\overline{\xi_0\xi_1}$ ヲ ξ_0 ニチヂメルヤウナ S^n 自身ノ Deformation ヲ $\psi_2 \in S^{n\,S^n}$ トスル。ψ_2 ニ際シテ $S^n - \overline{\xi_0\xi_1}$ ハ topologisch ニ $S^n - \xi_0$ ニ移ルヤウニスル。上ノ φ ハ

$$\varphi = \varphi''\psi_2\psi_1 \qquad \varphi'' \in Y^{S^n}(\xi_0\ y_0)$$

ノ形ニカケ、φ ト φ'' ハ一對一ニ對應スル。二ツノ道 φ_1, φ_2 ガ homotop ナル條件ハ, φ_1'', φ_2'' ガ homotop rel. (ξ_0, y_0) ナルコトデアル。シタガッテ $\pi_n(Y)$ ノ元ハ

---

*) [0,1] ハ線分 $0 \leqq t \leqq 1$　A×B ハ空間 A, B ノ topologisches Produkt.

$Y^{S^n}(\xi_0, y_0)$ ノ Komponente 即チ S^n ノ Y ヘノ Abbildungsklasse rel. $(\xi_0\ y_0)$ デアル。目標ハ Y^{S^n} ノ Komponente デアル。

2. 群 $K_n(Y)$. $Y_0^{S^{n-1}}(x_0\ y_0)$ ノ代リニ $Y_0^{S^{n-1}}$ ヲトリ，ソノ Fundamentalgruppe ヲ $K_n(Y)$ ト書ク。k_0 ヲ出テ k_0 ニカヘル $Y_0^{S^{n-1}}$ ノ閉ヂタ道ハ

$$f \in Y^{S^{n-1}\times[0,1]}(S^{n-1}\times(0) + S^{n-1}\times(1),\ y_0)$$

デ表ハサレル。

之レハ

$$f = f'\psi_1 \qquad f' \in Y^{S^n}(\xi_0 + \xi_1,\ y_0)$$

ノ形ニカケ。f ト f' ハ一對一ニ對應スル。故ニ $K_n(Y)$ ノ元ハ $Y^{S^n}(\xi_0+\xi_1,\ y_0)$ ノ Komponente デアルト考ヘラレル。

$\pi_n(Y)$ ノ元 α ヲアラハス $\varphi'' \in Y^{S^n}(\xi_0,\ y_0)$ ヲトル。

$f' = \varphi''\psi_2 \in Y^{S^n}(\xi_0+\xi_1,\ y_0)$ ハ $K_n(Y)$ ノ元 α' ヲ決メル。$\alpha \to \alpha'$ ハ明カニ π_n ノ K_n ノ中ヘノ Homomorphismus デアルガ，之レハ實ハ Isomorphismus デアル。

證明: $\alpha \to 1$ ナラバ $f' = \varphi''\psi_2$ ハ homotop 0, シカルニ ψ_2 ハ Identität ニ homotop ダカラ φ'' ハ $\varphi''\psi_2$ ニ homotop. 故ニ φ'' ハ homotop 0 *) シタガッテ $\alpha = 1$. q.e.d. ――脚註 *) 次頁へ――

故ニ $\pi_n(Y)$ ヲ $K_n(Y)$ ノ Untergruppe ト考ヘテヨイ。

3. $K_n(Y)$ ノ元 β ヲアラハス

$$f=f'\psi_1\in Y^{S^{n-1}\times[0,1]},\quad f'\in Y^{S^n}(\xi_0+\xi_1,\,y_0)$$

ニ於テ $f(x,t)$, $x\in S^{n-1}$ ハ $0\leqq t\leqq 1$ ニ對シテ y_0 ヲ出テ y_0 ニカヘル道ヲエガキ, $n\geqq 2$ ナラバソレハ x ノエラビ方ニカヽハラズ同ジ Wegeklasse ニ屬スル. シタガッテ $\pi_1(Y)$ ノ一ツノ元 w ヲキメル。$n=1$ ノトキハ $f(x_0,t)$ ノキメル $w\in\pi_1(Y)$ ヲトル。$\beta\rightarrow w$ ハ $K_n(Y)$ ノ $\pi_1(Y)$ ヘノ Homomorphismus デアル。$\beta\rightarrow 1$ ニナル β ハ $f(x_0,t)$ ガ $0\leqq t\leqq 1$ ニ對シテ homotop 0 ナ道ヲエガクモノデアル。

f ヲ homotop rel $(S^{n-1}\times(0)+S^{n-1}\times(1),\,y_0)$ ニ變ヘテ $f(x_0,t)=y_0$ ナルヤウニ出來ル。シタガッテ f ハ $\pi_n\subset K_n$ ノ元ヲアラハス。逆ニ $\beta\in\pi_n\subset K_n$ ニハ $1\in\pi_1$ ガ對應スル。スナハチ

$\beta\rightarrow 1$ ナル β ノ作ル Normalteiler ハ $\pi_n(Y)$ ニ他ナラナイ。

前頁脚註 *) $\varphi''\in Y^{S^n}(\xi_0,y_0)$ ハ homotop 0 ダカラ S^n ヲ Rand トスル Vollkugel E^{n+1} カラノ abbildung ニ拡張出來ル。ξ_0 ヲ固定シタマヽ, S^n ヲ E^{n+1} 内デ deform シテ ξ_0 ニチヾメルコトガデキルカラ、ξ_0 ノ Bild ヲ固定シタマヽ φ'' ヲ一点 y_0 ニチヾメルコトガ出來ル。スナハチ φ'' ハ rel $(\xi_0\,y_0)$ ニ homotop 0 デ, π_n ノ元 1 ヲ表ハス。

4. $K_n(Y)$ノ構造.

別ニ $g \in Y^{S^{n-1} \times [0,1]}$

$$g(x,t) = w(t) \quad (x \in S^{n-1} \text{ ニ関係ナク})$$

ヲ考ヘル。$w(t)$ ガ $\pi_1(Y)$ ノ元 w ヲアラハストキ，g ノアラハス $K_n(Y)$ ノ元ヲ $\overline{w}$ ト書ク。明カニ 3 ノ Homomorphismus ニ於テ $\overline{w} \longrightarrow w$、シタガッテ $\overline{w}$ ハ $K_n(Y)/\pi_n(Y)$ ノ Nebengruppe ノ中 w ニ對應スルモノノ代表デアル。而モ $\overline{w}$ ノ全体ハ $\pi_1(Y)$ ニ isomorph ナ $K_n(Y)$ ノ Untergruppe $\overline{\pi}_1(Y)$ ヲ作ッテ來ル。以上ヲマトメレバ:

定理. $Y_0^{S^{n-1}}$ ノ Fundamentalgruppe $K_n(Y)$ ハ n-te Homotopiegruppe $\pi_n(Y)$ ヲ Normalteiler ニモツ.

$$K_n(Y)/\pi_n(Y) \cong \pi_1(Y)$$

デアッテ，而モ $K_n(Y)/\pi_n(Y)$ ノ Nebengruppe ノ代表トシテ $\pi_1(Y)$ ニ isomorph ナ $K_n(Y)$ ノ Untergruppe $\overline{\pi}_1(Y)$ ノ元ヲトルコトガデキル。

シタガッテ $\beta \in K_n$ ハ $\beta = \alpha_1 \overline{w}$ 又ハ $\beta = \overline{w}\,\alpha_2$，$\alpha_i \in \pi_n$ $\overline{w} \in \overline{\pi}_1$ ノ形ニ夫々一意的ニ分解サレル。

5. Y^{S^n} ノ Abbildungsklasse.

$\alpha \longrightarrow \overline{w}\,\alpha\,\overline{w}^{-1}$ ハ $\pi_n(Y)$ ノ Automorphismus ヲナス。カヽル Automorphismen デ互ニウツリ得ル Elemente ノ Klasse ト Y^{S^n} ノ Komponente トガ一對一ニ對應スルコトヲ證明スルノガ本節ノ目標デアル。

先ヅ $n=1$ ノトキト仝様ニ Y^{S^n} ノ任意ノ Komponente ガ $Y^{S^n}(\xi_0, y_0)$ ノ Komponente ヲ少クトモ一ツ含ムコトニ注意スレバ，次ノ定理ヲ証明スレバイヽコトガ分ル。

定理。$\pi_n(Y)$ ノ元 α_0, α_1 ガ

$$\varphi_i = \varphi_i'' \psi_2 \psi_1, \quad \varphi_i'' \in Y^{S^n}(\xi_0, y_0), \quad i = 0, 1$$

デアラハサレテヰルトスル。φ_0'' ト φ_1'' ガ Y^{S^n} ノ Abbildung トシテ homotop ナル條件ハ，適當ナ $\overline{w} \in \pi_1(Y)$ ガアツテ

$$\alpha_0 = \overline{w}\,\alpha_1\,\overline{w}^{-1}$$

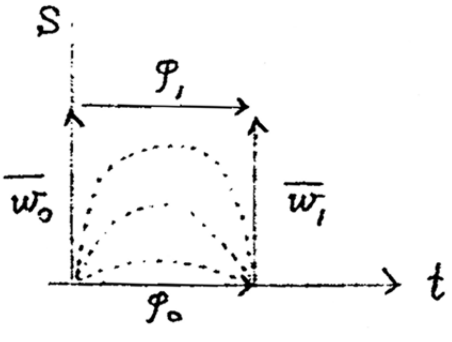
ナルコトデアル。

〔証明〕 $\varphi_i' = \varphi_i'' \psi_2 \in Y^{S^n}(\xi_0 + \xi_1, y_0)$ トオク。既ニ 2. ニ於テ述ベタ如ク，φ_i' ト φ_i'' ハ homotop ダカラ，φ_0' ト φ_1' ノ homotop ナ條件ヲ求メレバヨイ。シカルニソレハ

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x, t, 0) = \varphi_0(x, t) && x \in S^{n-1} \\ &\varphi(x, t, 1) = \varphi_1(x, t) && 0 \leqq t \leqq 1 \\ &\varphi(x, 0, s) = w_0(s) \quad (x\text{ニ関係ナク}) && 0 \leqq s \leqq 1 \\ &\varphi(x, 1, s) = w_1(s) && \end{aligned}\right\}$$

ナル $\varphi \in Y^{S^{n-1} \times [0,1] \times [0,1]}$ ガ存在スルコトデアル。

$\overline{w_i}(x, s) = w_i(s)$ ト書ク。



右ノ圖ヨリ明カナル如ク，φ ノ存在ハ $Y^{S^{n-1}}$ ニ於ケル道トシテ φ_0 ト $\overline{w_0}\,\varphi_1\,\overline{w_1}^{-1}$ トガ

homotop ナルコトデアル。w_0 ト w_1 トハ homotop ナ道デ $\pi_1(Y)$ ノ一ツノ元 $\overline{w}$ デアラハサレルカラ，$\kappa_n(Y)$ ノ元トシテ書ケバ

$$\alpha_0 = \overline{w}\,\alpha_1\,\overline{w}^{-1} \qquad\qquad q.e.d.$$

6. 定義. $\pi_n(Y)$ ノ元ガ一ツ一ツ Y^{S^n} ノ相異ナル abbildungsklasse ヲアラハストキ，（Eilenberg ニ従ッテ）Y ハ n-simple デアルトイフ。前節ニヨレバ：

定理. Y ガ n-simple ナ條件ハ任意ノ $\alpha \in \pi_n(Y)$, $\overline{w} \in \pi_1(Y)$ ニ對シテ

$$\alpha = \overline{w}\,\alpha\,\overline{w}^{-1}$$

ナルコトデアル. 換言スレバ

$$\kappa_n(Y) = \pi_n(Y) \times \pi_1(Y) \qquad (\text{直積!})$$

ナルコトデアル。

系. Y ガ單一連結，スナハチ $\pi_1(Y) =$ Einheitsgruppe ナラバ，Y ハスベテノ n ニツイテ n-simple デアル。

7. $n=1$ ノ場合.

$S^0 = x_0 + x_1$　故ニ Y^{S^0} ニ於テ h_0 ヲ出ル閉ヂタ道ヲ考ヘルニハ，x_0 ト x_1 ガ夫々独立ニ y_0 ヲ出テ y_0 ニ帰ル道ヲエガクト考ヘレバヨイ。従ッテ

$$\kappa_1(Y) \cong \pi_1(Y) \times \pi_1(Y)$$

x_0 ガ $\beta \in \pi_1(Y)$ ヲ x_1 ガ $\alpha \in \pi_1(Y)$ ヲエガクヤウナ $K_1(Y)$ ノ元ヲ

$$(\beta,\ \alpha)$$

ト書ク。 3. ニ述ベタ *Homomorphismus* ハ

$$(\beta,\ \alpha) \to \beta$$

トナルカラ，$K_1(Y)$ ノ *Untergruppe* トシテノ $\pi_1(Y)$ ハ

$$(1,\ \alpha)$$

ノ形ノ元カラ成ル。$(1, \alpha) = \alpha$ ト書イテシマフ。又 $\overline{\pi}_1(Y)$ ノ元ハ

$$(w, w) = \overline{w}$$

ノ形デアル。従ッテ

$$\begin{aligned}\overline{w}\,\alpha\,\overline{w}^{-1} &= (w,\ w)(1,\ \alpha)(w^{-1},\ w^{-1}) = (1,\ w\alpha w^{-1})\\ &= w\alpha w^{-1}\end{aligned}$$

トナリ，コノバアヒハ $\overline{w}$ ニヨル *Transformation* ハ $K_1(Y)$ ヲ考ヘルマデモナク，$\pi_1(Y)$ ノ *innerer Automorphismus* ニナッテシマフ。之ハ冒頭ニ述ベタ通リデアル。特ニ 6. ノ定理ハ

「Y ガ 1-*simple* ナル條件ハ，$\pi_1(Y)$ ガ *Abelsch* ナコトデアル。」

8. $K_n(Y)$ ノ *innere Automorphismen* ハ $\pi_n(Y)$ ノ中ダケデ考ヘレバ，$\overline{w} \in \overline{\pi}_1(Y)$ ニヨル *Transformation* 以外ニナイ。

何トナレバ

$n \geqq 2$ ナラ，$\pi_n(Y)$ ノ元 β ハ $\beta = \overline{w}\alpha'$, $\overline{w} \in \pi_1$, $\alpha' \in \pi_n$，π_n ハ abelsch ダカラ，$\alpha \in \pi_n$ ニ對シ

$$\beta\alpha\beta^{-1} = \overline{w}\,\alpha'\alpha\alpha'^{-1}\,\overline{w}^{-1} = \overline{w}\alpha\overline{w}^{-1}$$

$n = 1$ ナラ，$\beta = (w', w)$ トスルト

$$\beta\alpha\beta^{-1} = (w', w)(1, \alpha)(w'^{-1}, w^{-1})$$

$$= (1, w\alpha w^{-1}) = \overline{w}\alpha\overline{w}^{-1} \qquad \text{q.e.d.}$$

從ッテ 5. ノ定理ハ次ノヤウニモ云ヘル。

定理．$Y_0^{S^{n-1}}$ ノ Fundamentalgruppe $K_n(Y)$ ヲ konjugierte Elemente ノ Klassen ニ分ケル。Normalteiler $\pi_n(Y)$ ハ之レラノ Klassen ノ一部カラデキテヰル。$\pi_n(Y)$ ニ含マレル Klassen ト Y^{S^n} ノ Abbildungsklassen トガ一對一ニ對應スル。

6. ノ定理ヲ云ヒカヘレバ：

定理．Y ガ n-simple ナル條件ハ，$\pi_n(Y)$ ガ $K_n(Y)$ ノ Zentrum ニ含マレルコトデアル。

9. 例

S^2 ノ一ツノ直徑ノ兩端ヲ identifizieren シテデキル Polyeder ヲ Y トスル。Y ノ universelle Überlagerung $\tilde{Y}$ ハ可附番個ノ球面ヲ相切シテ一列ニ左右ヘ無限ニ並ベタモノデアル。ソレラノ球面ヲ順ニ

$$\cdots, S_{-n}, \cdots, S_{-1}, S_0, S_1, \cdots, S_n, \cdots$$

S_i ト S_{i+1} ノ切スル點ヲ $\tilde{y}_i$ トスル。$\pi_2(Y)$ ノ代リニ

$\pi_2(\tilde{Y})$ ヲ考ヘテモヨイ。$\tilde{y}_0$ ヲ起点トシテ考ヘル。$\pi_2(\tilde{Y})$ ノ元デ S_n ダケヲ grad $+1$ デオホフ Abbildung デアラハサレルモノヲ α_n トスル。$\pi_2(\tilde{Y})$ ハ

$$\cdots, \alpha_{-n}, \cdots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots$$

ヲ Erzeugende トスル freie abelsche Gruppe デアル。又 $\tilde{y}_0$ カラ $\tilde{y}_1$ ヘユク道ヲ $\pi_1(Y)$ ノ元トシテ w トカケバ，$\pi_1(Y)$ ハ w ヲ Erzeugende トスル freie zyklisch Gruppe デアル。

$$w\alpha_n w^{-1} = \alpha_{n+1}$$

ナルコトが容易ニ分ル。従ッテ $\alpha_0=\alpha$ トカケバ

$$\alpha_n = w^n \alpha w^{-n}$$

$\pi_n(Y)$ ハシタガッテ: α, w デ erzeugen サレル。Relationen ハ

$$\alpha_n\alpha_m = \alpha_m\alpha_n \qquad n, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$$

ダケデアル。$n > m$ トシテ w^{-m} デ transformieren シテミレバ

$$\alpha_k\alpha = \alpha\alpha_k \qquad k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

ダケデスム。w, α デカケバ

$$(R_k) \quad w^k\alpha w^{-k}\alpha w^k\alpha^{-1}w^{-k}\alpha^{-1} = 1 \qquad k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

スナハチ $\pi_2(Y)$ ハニツノ Erzeugende w, α ノ間ニ (R_k) ナル可附番個ノ Relationen ヲオイテデキル群デアル。

$\pi_2(Y)$ ノ元ハ

$$\beta = \prod \alpha_i^{\varepsilon_i}$$

ノ形，但シ ε_i ハ整數デ，有限個ヲノゾイテ 0 デアル。w^k デ transformieren スレバ

$$w^k \beta w^{-k} = \prod_i \alpha_{i+k}^{\varepsilon_i} = \prod_i \alpha_i^{\varepsilon_{i-k}}$$

スナハチ番号ガ一齊ニ k ダケズレルダケデ，指數ノ相対的ナ排列ハ一致スル。$\prod \alpha_i^{\varepsilon_i}$ ト $\prod \alpha_i^{\eta_i}$ ガ Y^{S^n} ノ同ジAbbildungsklasse ヲアラハス條件ハ，ε_i ノ並ビ方ト η_i ノ並ビ方ガ相對的ニ同ジナコト，精シクイヘバ，アル k ニ對シ

$$\eta_i = \varepsilon_{i-k}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

ナルコトデアル。