

803. 漸近的概週期性ト ergodic theorems.

吉田 耕作 (阪大)

§ 1

T 7 Banach 空間 E / bounded linear transformation トシ

$$(1) \quad \|T^n\| \leq \text{常数 } C \quad (n=1, 2, \dots)$$

トスル。

Mean ergodic theorem ⁽¹⁾ 任意, $x \in E$ = 對シ

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Tx + T^2x + \dots + T^nx}{n} \\ \text{weak compact + ラバ} \end{array} \right. \quad (n=1, 2, \dots) \text{ が } E \text{ テ}$$

$$\frac{T + T^2 + \dots + T^n}{n} x \text{ へ } \underline{\text{強收斂}} \text{ シ 其極限ハ } E \text{ / b. l.}$$

transf. T_1 7 以テ $T_1 \cdot x$ ト表ハセ且ツ

$$TT_1 = T, T = T_1^2 = T_1, .$$

Uniform ergodic theorem ⁽²⁾

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{適當} = \text{正整数 } m \text{ ト } E \text{ ト / } \underline{\text{完全連続線型作用素}} \\ \forall \epsilon \text{ ト } \text{ラバ } \|T^m - V\| < \epsilon \end{array} \right.$$

ト出來ル + ラバ

(1) 談話 720, 731

(2) 談話 679, 680

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} T = \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i + S, \quad T T_i = T_i T = \lambda_i T_i, \\ T_i^2 = T_i, \quad T_i T_j = 0 \quad (i \neq j), \\ T_i S = S T_i \quad \text{且} \quad \|S^n\| \leq \frac{\delta}{(1+\varepsilon)^n} \quad (n=1, 2, \dots) \end{array} \right.$$

ナリ如キ 完全連続線型作用素 T_i ト 連続 + 線型作用素 S トが存在スル。 但シ λ_i ハ T ノ 絶対値 / 固有値

以上ニツノ ergodic theorem ハ筆者ト角谷静夫氏
が嘗テ得タ所デアリマス。 本談話デハ之レ等ノニツノ中間=
アルト云フベキ ergodic theorem ニツノ得ラレルコ
ト及ビ之レ等ト 漸近的概週期性 トノ関係ヲ述ベタイ。

§ 2

考ヘノ出发点ハ H. Bohr ノ 概週期函数ノ平均ノ存
在ト M. Ergodic Theorem トノ関係デアリマス。
即チ

$-\infty < t < +\infty$ デ定義サレタ複素数値連続函数
 $f(t)$ ガ 概週期的デアルト云フノハ、任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シ
正数 l_ε ガ定リ実軸上長サ l_ε ノ區間ハ何レモ

$$l. u. b. \left| f(t+l) - f(t) \right| \leq \varepsilon \\ -\infty < t < +\infty$$

ナリ如キ数 l ヲ少クトモ一ツ含ムコトデアルコトキ
Bohr = ヲレバ念テノ Δ = 對シテ一様 = 平均

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^{u+\delta} f(t) dt$$

が存在シ且ツコノ平均ノ存在ガ概週期函数論ノ基礎ヲナス
ノデアリマス。

所ガ S. Bochner ト J. Favard = ヨレバ上ノ
almost periodicity ハ次ノ所謂 normality ト同等デア
リマス。即チ

$f(t)$ ガ normal ト云フハ、任意ノ實数列 $\{h_n\}$
ニ対シ函数列 $\{f_n(t)\}$, $f_n(t) = f(t+h_n)$ ガ 実軸
上全体で一様収斂スル部分函数列ヲ含ムコトデアル。

$$\text{換言スレバ距離}(f_n, f_m) = \text{l. u. b.} \left| f_n(t) - f_m(t) \right|_{-\infty < t < \infty}$$

ノ意味ヲ $\{f_n(t)\}$ ガ totally bounded = ナルコトデア
ル。

故ニ $\{f_\delta(t)\}$, $f_\delta(t) = f(t+\delta)$, ノ全体ガ上ノ距
離ノ意味ヲ張ル Banach 空間 E トココデノ norm /
ノ線型作用素 T_δ : $T_\delta f(t) = f_\delta(t) = f(t+\delta)$ = 對シ
テ mean ergodic theorem ヲ apply スレバ⁽¹⁾
平均ノ存在ガ云ヘルコトデアリマス。之レ trivial ナ
注意カラ ergodic theorems ヲ導クコト並ニ之レト
periodicity トノ関係ニ氣付キマス。即チ

(1) one-parameter group or semi-group ヲトス線
型作用素系ニ對シテ M. E. T. ノ拡張サレルコトハ云フ迄
モアリマセン。

§ 3

T が Banach 空間 E で (1) を満足する線型作用素トスル。

$x \in E =$ 對シテ点列 $\{T^n x\}$ ($n=1, 2, \dots$) を考へル。之レ点列ノ種々ノ *total boundedness* (t. b.) = 對應シテ種々ノ *ergodic theorems* が得ラレ且ツ之レ等ト種々ノ週期性トノ關係ガアルコトガ豫想サレル。

□ 一番弱イノハ (2) が云へル t. b. だ、コノ $x \in E$ 例へバ $\{T^n x\}$ ノ強ル (1) 凸集合ガ E だ *weak compact* = 十レ十ラ充分ト誤テス。之ガ兎ニ角 M. E. T. ノ場合ニ當ル (少シ強スガレドモ)。M. E. T. ハ何ト言ヒカヘテモ結局 (2) ノ假定ガ一番簡明テスカラ □ ハナクモガナデシタ。

此ノ場合ノ 週期性 = ツイテハ、 $T^n x = T_1 x + (T^n - T_1)x$ だカラ、M. E. T. = ヨリ、 $T^n x$ ハ其算術平均ガ 0 = 強收斂スル如キ誤差ヲ除イテ $n =$ 無關係ト述ベテ置クヨリ他アリマセン。

□ 次ハ、任意ノ $x \in E =$ 對シテ $\{T^n x\}$ ガ E ノ norm ノ意味ダ t. b. ノ場合。勿論コノトキハ M. E. T. ハ成立スル。

コノ case = 於テハ、 $T^n x$ ハ $n =$ 同シテ 漸近的 概週期性 トデモ名付クベキ性質ヲモツコトガ云へル。

即チ

任意 $\epsilon > 0$ に対シテ、正整数ヲ両端トスル長サ

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} l_\epsilon \text{ノ 區間ハ必ズ } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T^{n+l}x - T^n x\| \leq \epsilon \text{ ナ} \\ \text{ル如キ正整数 } l \text{ヲ 含ム如キ } l_\epsilon \text{ガ 定ル,} \end{array} \right.$$

証明 帰謬法ニヨル。或ル $\epsilon > 0$ に対シテ、如キ

l_ϵ ガ 決シテ定ラナイトスル。然ラバ任意ノ正整数 h_1 ニ 對シ通常ニ長サ $2h_1 + 1$ ノ正整数ヲ両端トスル、區間 (a_2, b_2) ヲ 定ムレバ之區間ニ屬スル任意ノ整数 l ニ 對シ

$$(6) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T^{n+l}x - T^n x\| > \epsilon$$

トナル。 (a_2, b_2) ノ 中點ヲ h_2 トスレバ $h_2 - h_1 \in (a_2, b_2)$ 故カラ $l = h_2 - h_1$ ハ (6)ヲ 満足スル。次ニ長サ $2(h_1 + h_2) + 1$ ナル正整数ヲ両端トスル、區間 (a_3, b_3) ヲ 定ムレバ之、區間ニ屬スル全テノ整数 l ニ 對シ (6)ガ 成立 ヲ如ク出来ル。所ガ (a_3, b_3) ノ 中點ヲ h_3 トスレバ $h_3 - h_2, h_3 - h_1$ ハ 双方共ニ $\in (a_3, b_3)$ 故カラ $l = h_3 - h_2, h_3 - h_1, h_2 - h_1$ ハ (6)ヲ 満足スル。以下 同様ニシテ、 h_1, h_2, h_3, \dots ヲ 定メ $i > j$ ナラ ば

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T^{n+h_i-h_j}x - T^n x\| > \epsilon$$

ナラシメ得ル。従ツテ

$$(7) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \| T^{n+h_i} x - T^{n+h_j} x \| > \varepsilon \quad (i \neq j)$$

所が假定 = 有り $\{ T^{h_i} x \}$ が t. b. 故に部分列 $\{ T^{h_{i'}} \}$ が適当 = エラビ

$$\| T^{h_{i'}} x - T^{h_{j'}} x \| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

ト出来ル、従って (7) = 有り 全て、 $n = \text{対シ}$

$$\| T^{n+h_{i'}} x - T^{n+h_{j'}} x \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

之レハ (7) = 矛盾スル。

—— 以上 ——

例 先ツ既 = 述べタ Bohr / 概週期函数 / 場合。次 = compactum Ω 全体ヲ Ω 内 = 寫不連続寫像 $t \rightarrow P(t)$ が contraction + リトスル：即チ任意、 $t, \delta \in \Omega = \text{対シ}$

$$\text{距離}(P(t), P(\delta)) \leq \text{距離}(t, \delta)$$

が成リ立ツトスル。 Ω デ連続 + 複素数値函数 $x(t)$ / 全体、作ル Banach 空間デ⁽¹⁾ 定義 + レタ 線型寫像 T :

$$T \cdot x = y, \quad y(t) = x(P(t))$$

ハ norm ≤ 1 且 $\{ T^n x \}$ ハ totally bounded デ⁽¹⁾。 (Ascoli-Arzelà 定理)

III 次ハ $\{ T^n \}$ が operator, norm 意味デ

(1) $\|x\| = \max_{t \in \Omega} |x(t)|$

大. 小. + 場合、コノトキハ E デノ連続 + 線型寫像ノ全体 \widehat{E}
 7 operator, norm, 意味デ Banach 空間ト考ヘ
 レバ \widehat{E} デ \square , case = ナル 訳デスカラ M. E. T. 即
 チ operator, norm, 意味デ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m$,
 存在及ビ漸近的概週期性ガ云ヘル 訳デアル。

(注意) $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n T^m \right\}$ が \widehat{E} デ weak compact ト
 云フ 弱イ 假定デ \widehat{E} デノ M. E. T. モ得ラレル 訳デス。之レ
 ハ \square ト \square トノ中間ニ位スルモノデセウ。実ハ之レヲ
Uniform Ergodic Theorem ト呼ガベキカモ知レ
 マセンガ、 \widehat{E} ノ conjugate space ヲ考ヘルト云フ
 ノモ一オ 考シイ 訳デスカラ、併シ斯ヲ考ヘテクルト \widehat{E} ハ
 所謂 linear metrical complete ring デスカ
 ラ、operate サレル 点 = free + ring デノ ergo-
dic theorem ヲ考ヘ得ル 訳デス。餘リコノトヲ
 ツテアルト H. Weyl 先生 = industrial mathematics
 (?) ト怒ラレ 相デスカラ一先ツ之レヲ止メテヲキ
 マセウ。

但シ私ノ目的ハ、M. E. T. ト U. E. T. トハ 餘リ =
 カケハナレスギテルノデ、實際問題 = apply スル上ケ
 ラモ 中間ヲ埋メルコトハ 必要ト信ジタカラ = 他ナラナカ
 タノデス。

\square 次ハ $\{T^n\}$ が operator, norm, 意味
 デ大. 小. 且ツ $\{T^n\}$, 極限ノ一ツガ 完全連続 + 場合,

之レガ U. E. T. = 他 + ラヌコトハ (3) 及ビ (4) カラ直チ = ヲ
カリマス。

(注意) 完全連続性ノヌメニ、 T ノ絶対値 $| \cdot |$ ノ固有
値ノ個数有限ト云フコトガ U. E. T. ノ場合ニハ出テ來ル
訳デスガ、IIIノ場合ニハ一般ニ無限ニ多クアル訳デス。
實際 S. Bochner ト J. von Neumann ノ Almost
periodic functions in Groups (Trans.
Amer. Math. Soc., 1935, 21-50) = 相應シテ
考ヘレバ明デアリマセウ。

勿論 B. N. ノ場合ハ 群ノ上デ考ヘテルタメ = "Asymp-
totic" ノ形容詞トシ = almost periodic = ノル
訳デスガ吾々ノ場合ニハ semi-group (正整数ノ加
法) ノルタメ = B. — N. ノ如キ Harmonic Analysis
ガ出来タイノデアリマス。 semi-group ノ上ノ a. p. f.
ハ大切ノ問題デアラウト思ヒマス。