804. Markoff 過程ニ関スル二三ノ結果, I

角谷　静夫（阪大）

Markoff 過程ハ本紙上談話會ニテ屢々論ジラレ、特ニ吉田氏ハ本号169号746及ビ177号780ニ

於テ Doeblin ノ結果ヲ Kryloff-Bogolioùboff ノ條件ノ下デ証明サレタ。吉田氏ノ方法ハ Banach 空間ノ linear operation ノ理論ヲ使フモノデ Doeblin ノ集合論的方法ニ比シテ、理論的ニ整頓サレテヰル点ガ優レテヰル。本号ニ於テハ、コノ吉田氏ノ方法ヲ更ニ発展セシメレバ種々ノ興味アル結果ガ得ラレルコトヲ示サウ。

Ω ヲ抽象空間トシ、コヽニ Lebesgue 型ノ measure ガ定義サレテヰルモノトスル。今 Ω ノ内部デ simple, homogeneous ナ Markoff 過程ヲ考ヘル。Ω ノ点 t ガ単位時間後ニ Ω 内ノ Borel 集合 E ニハイル確率ヲ $P(t, E)$ ニテ表ハシ、$P(t, E)$ ガ t ヲ固定スレバ Borel 集合 E ニ関スル completely-additive ナ集合函数，E ヲ固定スレバ t ニ関スル Borel measurable ナ函数デアルト假定スル。然ルトキハ Ω ノ点 t ガ n 単位時間後ニ Ω ノ Borel 集合 E ニハイツテ来ル確率 $P^{(n)}(t, E)$ ハ

$$(1)\quad P^{(n)}(t,E)=\int_{\Omega} P^{(n-1)}(t,ds)P(s,E),\ n=2,3,\cdots\cdots,$$

$$P^{(1)}(t,E)=P(t,E)$$

ニヨツテ與ヘラレ且ツコレハ

$$(2)\quad P^{(n)}(t,E)\geqq 0,\quad P^{(n)}(t,\Omega)\equiv 1$$

ヲ満足スル。吾々ノ目的ハ $P^{(n)}(t, E)$ 及ビソノ算術平均 $Q^{(n)}(t,E)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}P^{(m)}(t,E)$ ノ $n\to\infty$ ナルト

キノ状態ヲ調ベルコトデアル。

勿論コノ問題ハ$P(t,E)$ニ對シテ全然條件ノナイトキハ非常ニ困難デアル。W. Doeblin[1] ハ次ノ條件

$$
(D)\begin{cases}
\text{positive integer } d \text{ 及ビ positive number } b, \eta \text{ ガ存在シテ mes}(E)<\eta \text{ ナル任意ノ} \\
\text{Borel 集合 } E \text{ 及ビ任意ノ } t\in\Omega \text{ ニ對シテ} \\
P^{(d)}(t,E)<1-b \text{ トナル。}
\end{cases}
$$

ノ下デ、コノ問題ヲ精シク論ジテヰル。Doeblin ノ方法ハ直接ニ集合論的ナ考ヘヲ使フモノデアル。

本談話デハコノ問題ヲ他ノ方法デ論ジル。コレハ Kryloff Bogoliouboff 及ビ吉田氏[2] ニヨツテ用ヒラレタモノデ Banach 空間ニ於ケル linear operation ノ考ヘヲ使フモノデアル。

コレヲ説明スルタメニ、二ツノ Banach 空間(M), (M^*)ヲ考ヘル。先ヅ(M)ハΩノアラユル Borel 集合 E ニ對シテ定義サレタ（real 又ハ complex valued ナ）completely additive ナ集合函數$x(E)$全体ノ作ル Banach 空間デ x ノ norm $\|x\|$ ハ $\|x\|=$ total variation of $|x(E)|$ on Ω ニヨツテ定義サレル。次ニ(M^*)ハΩデ定義サレタアラユル有限且ツ Borel measurable ナ函數ノ作ル Banach 空間デ

---

(1) 紙上談話会 166, 167, 168 ニ於ケル紹介記事參照。

(2) 吉田氏紙上談話會 169 号, 177 号。

$\|x\| = \underset{t\in\Omega}{l.u.b.}|x(t)|$ ニヨツテソノ norm ガ定義サレル。

然ルトキハ $P(t,E)$ ハコレラノ Banach 空間ニ於ケル bounded linear ナ integral operator ヲ定メル。即チ

$$(3)\qquad x \to T(x) = y:\ y(E) = \int_\Omega x(dt)P(t,E)$$

ハ ($\mathfrak{M}$) ヲ ($\mathfrak{M}$) 自身ノ中ヘウツス bounded linear operation デアリ

$$(4)\qquad x \to \overline{T}(x) = y:\ y(t) = \int_\Omega P(t;ds)\,y(s)$$

ハ (M^*) ヲ (M^*) 自身ノ中ヘウツス bounded linear operation デアル。且ツ T 及ビ $\overline{T}$ ノ iteration T^n 及ビ $\overline{T}^n$ ハ夫々 kernel $P^{(n)}(t,E)$ ニヨツテ與ヘラレルコトハ容易ニワカル。

Kryloff-Bogolioùboff ハ

(K) $\left\{\begin{array}{l}\text{positive integer } m \text{ 及ビ completely} \\ \text{continuous ナ linear operation } V \text{ ガ} \\ \text{存在シテ } \|T^m - V\| < 1 \text{ トナル}\end{array}\right.$

ト云フ條件ノ下デ $P^{(n)}(t,E)$ ノ asymptotic behaviour ヲ調ベタ。吉田氏ハ Doeblin ノ條件 (D) カラ Kryloff-Bogolioùboff ノ條件 (K) ガ出ルコトヲ示シ且ツコノ條件 (K) ノ下デ Doeblin ノ得タ殆ドスベテノ結果ガ、ヨリ精シイ形デ得ラレルコトヲ示サ

レタ。

吉田氏ノ方法ハ *uniform ergodic theorem*[3] ヲ用ヒルノデアル。本談話ニ於テハ、更ニコノ吉田氏ノ考ヘヲ進メテ行ケバ、色々面白イ結果ガ得ラレルコトヲ示サウ。

$\boxed{\textit{Lemma 1}}$ (*Uniform ergodic theorem*) *bounded linear operation* T ガ條件 (K) ヲ満足スレバ T ハ絶對値 1 ノ固有値ヲ有限個シカ持タナイ。コレラヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_k$ トスレバ T ハ次ノ形ニ分解サレル：

$$(5)\quad T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_{\lambda_i} + S$$

コヽニ T_{λ_i} $(i=1,2,\cdots\cdots,k)$ ハ *completely continuous* ナ *linear operator* デ

$$(6)\begin{cases} T_{\lambda_i} \cdot T_{\lambda_j} = 0 \quad (i \neq j), \quad T_{\lambda_i}^2 = T_{\lambda_i}, \\ T T_{\lambda_i} = T_{\lambda_i} T = \lambda_i T_{\lambda_i}, \quad T_{\lambda_i} S = S T_{\lambda_i} = 0 \end{cases}$$

$$(7)\quad \| S^n \| \leqq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots, \quad (M, \varepsilon \text{ ハ正ノ常數})$$

デアル。シタガッテ $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ對シテ

---

(3) 吉田氏及ビ筆者ノ紙上談話會 162 号ノ談話 710, 711 參照。コヽニ於テハ *uniform ergodic theorem* トイフ名ハマダ用ヒラキナカッタガ *mean ergodic theorem* ニ對シテコウイフ風ニ呼ブノガ適當デアロウ。

(8) $$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n T_{\lambda_i} + S^n$$

トナリ、且ツ

(9) $$\left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} T^m / \lambda_i^m - T_{\lambda_i} \right\| \leqq \frac{M}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナル如キ constant M ガ存在スル。

$\boxed{\text{定理 1}}$　條件（K）ノ下デ $P^{(n)}(t, E)$ ハ次ノ形ニ分解サレル：

(10) $$P^{(n)}(t, E) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_{\lambda_i}(t, E) + S^{(n)}(t, E),$$

$$n = 1, 2, \cdots\cdots$$

コヽニ $\{\lambda_i\}$（$i = 1, 2, \cdots\cdots, k$）ハ絶對値 1 ノ T ノ固有値デ且ツ

(11) $$\underset{t \in \Omega, E \subset \Omega}{\text{l.u.b.}} \left| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{P^{(m)}(t, E)}{\lambda_i^m} - P_{\lambda_i}(t, E) \right| \leqq \frac{M}{n},$$

(12) $$\int_\Omega P^{(n)}(t, ds) P_{\lambda_i}(s, E) = \int_\Omega P_{\lambda_i}(t, ds) P^{(n)}(s, E) = \lambda_i^n P_{\lambda_i}(t, E)$$

(13) $$\int_\Omega P_{\lambda_i}(t, ds) P_{\lambda_j}(s, E) = P_{\lambda_i}(t, E) \quad if \quad i = j$$
$$= 0 \qquad if \quad i \neq j$$

(14) $$\int_\Omega P_{\lambda_i}(t, ds) S(s, E) = \int_\Omega S(t, ds) P_{\lambda_i}(s, E) = 0$$

(15) $$\underset{t \in \Omega, E \subset \Omega}{\text{l.u.b.}} \left| S^{(n)}(t, E) \right| \leqq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n},$$

$i=1,2,\cdots\cdots,k;\quad n=1,2,\cdots\cdots,$ M, ε ハ正ノ常数

$\boxed{\text{証明}}$ コノ定理ハ Uniform ergodic theorem ヨリ直チニ得ラレル. 唯コヽニ注意スベキハ Uniform ergodic theorem ニ於テハ operator ノ分解ガ得ラレタダケデ kernel ノ分解ハ未ダ得ラレテヰナイコトデアル。シカシ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}T^m/\lambda_i^m=T_{\lambda_i}$$

ガ uniform ニ存在スルコトヨリ kernel ノ分解モ同時ニ得ラレル。(証明終)

特ニ $\lambda=1$ ハ T ノ固有値デ、コレニ對應スル kernel $P_1(t,E)$ ハ

$$(16)\quad \underset{t\in\Omega,E\subset\Omega}{l.u.b.}\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}P^{(m)}(t,E)-P_1(t,E)\right|\leqq\frac{M}{n},$$

$$n=1,2,\cdots\cdots$$

ヲ滿足スル。シタガッテ

$$(17)\quad P_1(t,E)\geqq 0,\qquad P_1(t,\Omega)\equiv 1$$

トナルコトモ明ケデアル。

次ニ (M) ニ於ケル方程式

$$(18)\quad T(x)=x:\ x(E)=\int_\Omega x(dt)P(t,E)$$

ヲ考ヘレバ, コレハ 1 ガ T ノ固有値デアル故, 少クトモ一ツノ固有函數ヲモツ. 實際 $P_1(t,E)$ ハ identically zero デナイカラ適當ニ $t=t_0$ ヲトレバ $P_1(t_0,E)$ ハ

identically zero デナク且ツ (12) ヨリ

$$(19)\quad P_1(t_0, E) = \int_\Omega P_1(t_0, ds) P(s, E)$$

デアルカラ $x(E) = P_1(t_0, E)$ ハ (18) ノ non-trivial solution デアル. 以下ニ於テハ コノ事実ヲ使ッテ $P_1(t, E)$ ノ構造ヲシラベルコトニスル。

以下ノ議論ヲワカリ易クスルタメ semi-order ノツイタ Banach 空間ノ理論ヲ使フコトニスル。先ヅ $(\mathfrak{M})$ ニ属スル real-valued completely additive ナ集合函数 $x(E)$ ハ任意ノ Borel 集合 E ニ対シテ $x(E) \geqq 0$ デアルトキ positive デアルト呼ビ $x \geqq 0$ ニテコレヲ表ハス. 一般ニ $x, y \in (\mathfrak{M})$ ニ對シテ $x - y \geqq 0$ ナルトキ $x \geqq y$ デアルト定義スレバ コレニヨッテ real ナ $(\mathfrak{M})$ ニ対シテハ semi-ordering が與ヘラレル。コノ semi-order ニ對シテ $x \vee y$, $x \wedge y$, $x_+ = x \vee 0$, $x_- = x \wedge 0$ 等が定義出来ル. 然ルトキハ

Lemma 2 $x(E)$, $y(E)$ が (18) ノ real valued solution デアレバ $x_+, x_-, x \vee y, x \wedge y$ 等ハ又 (18) ノ solution デアル。

証明 x_+ ニ對シテ証明ヲスレバ十分デアル.

$$x(E) = \int_\Omega x(dt) P(t, E)$$

ヨリ $P(t, E) \geqq 0$ ナルコトヲ使ヘバ

$$X_+(E) \leqq \int_\Omega X_+(dt)\,P(t, E)^{(4)}$$

然ルニ $P(t, \Omega) \equiv 1$ デアルカラ、コゝハ等号ガ成立シナケレバナラナイ。

$\boxed{\textit{Lemma 3}}$

(20) $T(X_\alpha) = X_\alpha$, $X_\alpha \geqq 0$, $X_\alpha(\Omega) = 1$,

$X_\alpha \wedge X_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$

ヲ満足スル $(\mathfrak{M})$ ノ *element* ノ *system* $\{X_\alpha(E)\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots\ldots, l)$ ガ存在シテ、任意ノ

(21) $T(X) = X$, $X \geqq 0$, $X(\Omega) = 1$

ヲ満足スル $X(E) \in (\mathfrak{M})$ ハ

(22) $X(E) = \sum_{\alpha=1}^{l} c_\alpha X_\alpha(E)$, $c_\alpha \geqq 0$, $\sum_{\alpha=1}^{l} c_\alpha = 1$

ナル形ニ表ハサレル。

(注意) *Lemma 3* ハ $T(X) = X$ ノ *solution* 全体ガ *finite-dimension* デアリ、且ツコレニ(20)ノ條件ヲ満足スル如キ特殊ノ *base* ガ存在スルコトヲ主張スル。単ニ *finite base* ガ存在スルコトダケナラバ、コレハ T ガ條件(K)ヲ満足スルコトカラ直チニ得ラレル。以下ノ証明デハ T ガ *positive operation* $(X \geqq 0 \rightarrow T(X) \geqq 0)$ デアルコトガ *essential* デアル。

$\boxed{\text{証明}}$ (20)ヲ満足スル如キ $(\mathfrak{M})$ ノ *element* X_1,

---

(4) $T(X) = X$ ヨリ $T(X_+) \geqq T(X) = X$. 他方 $T(X_+) \geqq 0$ ハ明カ。ヨッテ $T(X_+) \geqq X \vee 0 = X_+$.

$x_2, \cdots\cdots, x_\ell$ ノ<u>カズ</u>ノ最大値ヲ ℓ トセヨ。（カヽル ℓ ガ存在スルコトハ上記ノ注意ヨリ明カ）. コノ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\ell$ ガ求ムル base デアルコトヲ証明シヨウ.

コレヲ示スタメ先ヅ $x(E)$ ヲ (21) ヲ満足スル任意ノ(殊ノ) element トセヨ。$x(E)$ ガ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\ell$ ノ line combination デアルコトヲ証明シヨウ。コノタメニ $x'_\alpha = x \wedge x_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, \ell)$ トオケ。Lemma 2 ニヨリ x'_2 ハ又 (18) ノ solution デアル. 最初ニ各々ノ $\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, \ell$ ニ對シテ $x'_\alpha = c_\alpha x_\alpha$ トナル如キ常数 c_α ガ存在スルコトヲ示サウ。実際モシコレガアル α ニ對シテ成立シナカツタトスレバ x_α ト $\alpha''_\alpha \equiv x'_\alpha / \| x'_\alpha \|$ トハ等シクナク, シタガッテ $(x_\alpha - x''_\alpha)_+$, $(x''_\alpha - x_\alpha)_+$ ハ共ニ 0 デナイ。且ツ再ビ Lemma 2 ニヨツテコレラハ又 (18) ヲ満足スル. ヨッテ $x_{\alpha 1} = (x_\alpha - x''_\alpha)_+ / \| (x_\alpha - x''_\alpha)_+ \|$, $x_{\alpha 2} = (x''_\alpha - x_\alpha)_+ / \| (x''_\alpha - x_\alpha)_+ \|$ トオケバ $\ell + 1$ 個ノ(殊ノ) element $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha+1}, \cdots\cdots, \cdots\cdots, x_\ell$ ハ (20) ヲ明カニ満足シテヰル. コレハ ℓ ノ定義ニ矛盾スルカラ各々ノ α ニ對シテ $x'_\alpha = x \wedge x_\alpha = c_\alpha x_\alpha$ トナル如キ常数 c_α $(0 \leqq c_\alpha \leqq 1)$ ガ存在スル.

此ノ如クシテ各々ノ α ニ對シテ $x'_\alpha = c_\alpha x_\alpha$ トナル如キ常数 c_α ガ存在スルコトガワカッタ。次ニコノ c_α ニ對シテ $x = \sum_{\alpha=1}^{\ell} x'_\alpha \equiv \sum_{\alpha=1}^{\ell} c_\alpha x_\alpha$ トナルコトヲ証明シヨウ。

コノタメニ $x' = x - \sum_{\alpha=1}^{l} x'_\alpha$ トオケバ $x' \wedge x_\alpha = 0$,

$\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l$ トナルコトヲ証明シヨウ. コレヲ示スニハ $x' \leqq x - x'_\alpha$ デアルカラ $(x - x'_\alpha) \wedge x_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l$) ヲ示セバヨイ。

然ルニコレハ $c_\alpha = 1$ ノトキハ $x = x'_\alpha = x_\alpha$ トナルコトヨリ明カデアリ、$c_\alpha < 1$ ナルトキハ

$(1 - c_\alpha)((x - x'_\alpha) \wedge x_\alpha) \leqq (x - x'_\alpha) \wedge (1 - c_\alpha) x_\alpha = (x - x'_\alpha) \wedge (x_\alpha - x'_\alpha) = (x - (x \wedge x_\alpha)) \wedge (x_\alpha - (x \wedge x_\alpha)) = 0$ トナルコトヨリ明カデアル。ヨッテ

$x' \wedge x_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l$, ガ証明サレタ. コレヨリ $x' = 0$ デナケレバナラヌコトガワカル. 何トナレバモシ $x' \neq 0$ デアレバ (勿論 $x' \geqq 0$) $l+1$ 個ノ (m) ノ element $x'/\|x'\|$, x_1, x_2, $\cdots\cdots$, x_l ハ再ビ (20) ヲ満足スル, コレハ l ノ定義ニ矛盾スルカラ $x' = 0$ デナケレバナラナイ. 此ノ如クシテ $x' = 0$ ガ示サレタ. 従ッテ

$x = \sum_{\alpha=1}^{l} c_\alpha x_\alpha$ トナル. $\sum_{\alpha=1}^{l} c_\alpha = 1$ トナルコトハ明カデアルカラ, コレデ Lemma 2 ノ証明ハ終ル。

$\boxed{\text{定理 2}}$ 條件 (K) ノ下デ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P^{(m)}(t, E) =$

$P_1(t, E)$ ハ uniformly ニ存在シ、ソノ limit ノ kernel $P_1(t, E)$ ハ次ノ形ニ分解サレル:

(23) $$P_1(t, E) = \sum_{\alpha=1}^{l} y_\alpha(t)\, x_\alpha(E)$$

コヽニ $\{x_\alpha(E)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots,l)$ ハ Lemma 3 ニ於テ定メラレタ system デアリ $\{y_\alpha(t)\}$ $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,l)$ ハ

$$(24)\quad \overline{T}(y_\alpha)=y_\alpha,\quad y_\alpha(t)\geqq 0,\quad \sum_{\alpha=1}^{l} y_\alpha(t)\equiv 1$$

$$(25)\quad \int_\Omega x_\alpha(dt)\,y_\beta(t)=1\ (\alpha=\beta),\ =0\quad(\alpha\neq\beta)$$

ヲ満足スル (M^*) ノ element ノ system デアリ、且ツ

$$(26)\quad \overline{T}(y)=y:\quad y(t)=\int_\Omega \underline{P}(t,ds)\,y(s),$$

ヲ満足スル任意ノ $y(t)\in(M^*)$ ハ

$$(27)\quad y(t)=\sum_{\alpha=1}^{l} c_\alpha\cdot y_\alpha(t)$$

ナル如ク $y_\alpha(t)$ ノ linear combination トシテ unique ニ表ハサレル.

$\boxed{\text{証明}}$ $P_1(t,E)$ ガ各々ノ t ニ對シテ (18) ノ solution デアルコトヲ考ヘレバ (23) ノ分解ハ Lemma 4.5. ヨリ直チニ得ラレル。Lemma 4,5 ニ於テ定メラレタ $\{x_\alpha(E)\}$ $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,l)$ ノ性質ヨリ $x_\alpha(E'_\alpha)=1$, $x_\beta(E'_\alpha)=0$ $(\beta\neq\alpha)$ ナル如キ Borel 集合 E'_α ハ明カニ存在スルカラ、コノ E'_α ヲトツテ (23) ニテ $E=E'_\alpha$ トオケバ直チニ $y_\alpha(t)$ $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,l)$ ガ bounded Borel measurable ナルコトガ知ラレル. 次ニ (24)

ヲ示スノデアルガ、後ノ二ツハ明カデアルカラ初メノ

$\overline{\mathrm{T}}(y_\alpha) = y_\alpha$ ナル関係ヲ示セバヨイ。コレヲ示スタメニ

ハ定理１ノ関係 (12)（$n=1,\ \lambda_i=1$）

$$\int_\Omega \mathrm{P}(t, ds)\, \mathrm{P}_1(s, E) = \mathrm{P}_1(t, E)$$

ヲ用フレバヨイ。(23) ヨリコレハ

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \Big(\int_\Omega \mathrm{P}(t, ds)\, y_\alpha(s) \Big) x_\alpha(E) = \sum_{\alpha=1}^{l} y_\alpha(t)\, x_\alpha(E)$$

トナリコヽデ $E = E'_\alpha$ トオケバ

$$\int_\Omega \mathrm{P}(t, ds)\, y_\alpha(t) = y_\alpha(t)$$

即チ $\overline{\mathrm{T}}(y_\alpha) = y_\alpha$ ガ得ラレタ。(25) ヲ示スタメニハ関係 $\mathrm{T}(x_\alpha) = x_\alpha$ ヨリ出発スル。$\mathrm{T}(x) = x$ ト $\mathrm{T}_1(x) = x$ トハ equivalent デアルカラ $\mathrm{T}_1(x_\alpha) = x_\alpha$ 即チ

$$\int_\Omega x_\alpha(dt)\, \mathrm{P}_1(t, E) = x_\alpha(E)$$

ヲ得ル。コレハ (23) ニヨリ

$$\sum_{\beta=1}^{l} \Big(\int_\Omega x_\alpha(dt)\, y_\beta(t) \Big) x_\beta(E) = x_\alpha(E)$$

トナルガコヽデ $E = E'_\beta$ トオケバ (25) ガ得ラレル。

此ノ如クシテ定理ノ最初ノ半分ハ証明サレタ。後ノ半分ヲ証明スルニハ次ノ様ニスレバヨイ。先ヅ $\overline{\mathrm{T}}(y) = y$ ナル仮定ヨリ $\overline{\mathrm{T}}_1(y) = y$ 又ハ

$$y(t) = \int_\Omega \mathrm{P}_1(t, ds)\, y(s)$$

コヽニテ再ビ(23)ヲ使ヘバ

$$y(t)=\sum_{\alpha=1}^{l} y_\alpha(t)\left(\int_\Omega x_\alpha(ds)\, y_\alpha(s)\right)=\sum_{\alpha=1}^{l} c_\alpha y_\alpha(t)$$

但シ $c_\alpha=\int_\Omega x_\alpha(ds)\, y(s)$

以上デ定理2ノ証明ガ終ル。

定理2ノ分解(23)ハ重要ナ結果デコレヨリ種々ノコトガラガ結論サレル。特ニコレニヨツテ Ω ヲ ergodic part, ergodic kernel, dissipative part 等ニ分割スルコトガ出来ル。以下ニソレヲ示サウ。

各々ノ α ニ對シテ $y_\alpha(t)=1$ トナル如キ t 全体ノ集合ヲ $\overline{E}_\alpha$ ニテ表ハシコレヲ <u>ergodic part</u> ト呼ブ。$y_\alpha(t)$ ハ何レモ Borel measurable デアルカラ $\overline{E}_\alpha$ ハスベテ Borel 集合デアル。

定理 3

(28) $x_\alpha(\overline{E}_\beta)=1 \quad (\alpha=\beta), \quad =0 \quad (\alpha\neq\beta)$

(29) $P_1(t, \overline{E}_\alpha)=1, \quad t\in\overline{E}_\alpha$

(30) $\underset{t\in\overline{E}_\alpha,\, E\subset\Omega}{\text{l.u.b.}}\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P^{(m)}(t,E)-x_\alpha(E)\right|\leqq\frac{M}{n},$

$n=1,2,\text{------}$

コヽニ M, ε ハ正ノ常數デアル。

(注意) (29)ハ一度 $\overline{E}_\alpha$ ニハイツタ点ハ決シテ $\overline{E}_\alpha$ ノ外ヘ出ルコトナク $\overline{E}_\alpha$ ノ中デ遷移サレルコトヲ示シ、(30)ハ uniform ナ limit $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P^{(m)}(t,E)=P_1(t,E)$ ガ

$t \in \bar{E}_\alpha$ ナル initial point ニハ無関係デアルコトヲ示シテヰル。コレデ $\bar{E}_\alpha$ ヲ ergodic part ト名ヅケタ意味ガハッキリスル。

証明　定理 3 ヲ証明スルタメニハ次ノ Lemma 4 ヲ証明スレバ十分デアル。(実際 (28), (29) ハ夫々 (25), (26) ヨリ Lemma 4 ヲ使ヘバ直チニ得ラレル。又 (30) ハ $t \in \bar{E}_\alpha$ ナルトキ $y_\alpha(t) = 1$, $y_\beta(t) = 0$, $(\beta \neq \alpha)$ デ $P_1(t, E) = x_\alpha(E)$ トナルコトヲ考ヘレバ殆ド明カデアル)

Lemma 4　$x(E)$ ヲ $(\mathfrak{M})$ ニ属スル completely additive ナ集合函数 $\in (\mathfrak{M})$ デ $x(\Omega) = 1$, $x(E) \geqq 0$ for any Borel set $\subset \Omega$ トスル。又 $y(t)$ ヲ (M^*) ニ属スル bounded Borel measurable function デ $0 \leqq y(t) \leqq 1$ for any $t \in \Omega$ ナルモノトスル。今若シ

$$\int_\Omega x(dt)\, y(t) = 1$$

デアレバ $y(t) = 1$ トナル如キ t 全体ノ集合 E_0 ハ $x(E_0) = 1$ ヲ満足スル。

証明　$1 - \frac{1}{n} \leqq y(t) < 1 - \frac{1}{n}$ トナル如キ t 全体ノ集合ヲ E_n トセヨ。E_n ハ互ニ共通点ノナイ Borel 集合デ且ツ

$$\Omega = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

ヨッテ

$$1=\int_{\Omega}x(dt)y(t)=\int_{E_0}x(dt)y(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}x(dt)y(t)$$

$$\leqq x(E_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x(E_n)$$

$$\leqq x(E_0)+\sum_{n=1}^{\infty}x(E_n)=x(\Omega)=1$$

然ルニコヽデ等号ノ成立スルノハ $x(E_n)=0,\ n=1,2,\cdots\cdots$ トナルトキニ限ルカラ。$x(E_0)=1$ デナケレバナラナイ。（証明終）

此ノ如クシテ定理３ノ証明ガ終ッタ。容易ニワカル如ク $\bar{E}_\alpha$ ハ $x_\alpha(\bar{E}_\alpha)=1$ ヲ満足スル最小ノ（measure ノ一番小サイ）Borel集合デハナイ。實際 $E\subset\bar{E}_\alpha$, mes $(E)<$ mes $(\bar{E}_\alpha)$ デ且ツ $x_\alpha(E)=1$ トナル如キ Borel 集合ハ存在スルカモ知レナイノデアル。ヨッテ今 $x_\alpha(E)=1$ ヲ満足スル $\bar{E}_\alpha$ ノ部分 Borel 集合ノウチ measure ノ最小ノモノ（コレハ必ズ存在スル！）ヲ E_α ニテ表ハセバ E_α ハ measure 0 ノ集合ヲ除イテ一意的ニ定マリ且ツ $E\subset E_\alpha$ mes $(E)>0$ ナル如キ任意ノ Borel 集合ニ對シテ $x_\alpha(E)>0$ ガ成立スル。各々ノ α ニ對シテ E_α ヲ適當ニ（measure 0 ノ集合ヲ適當ニ加減シテ）定義スレバ次ノ定理ガ成立スル。

$\boxed{\text{定理４}}$ $E_\alpha\ (\alpha=1,2,\cdots\cdots,l)$ 及ビ $\Delta=\Omega-\sum_{\alpha=1}^{l}E_\alpha$

ハ次ノ條件ヲ滿足スル。

(31) $\mathrm{P}_1(t, E_\alpha)=1, \quad t \in \overline{E}_\alpha$

(32) $\mathrm{P}(t, E_\alpha)=1, \quad t \in E_\alpha$

(33) $t \in \overline{E}_\alpha,\ E \subset E_\alpha,\ \mathrm{mes}(E)>0$ ナラバ

$$\mathrm{P}_1(t, E)>0.$$

（ヨッテ $n=n(t,E)$ ガ存在シテ $\mathrm{P}^{(n)}(t,E)>0$）

(34) $$\underset{t\in\Omega}{\mathrm{l.u.b.}}\ \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\mathrm{P}^{(m)}(t,\Delta)\leqq\frac{M}{n},$$

$n=1,2,\cdots\cdots$（M ハ常數）

（注意） (31)ハ $\overline{E}_\alpha$ 中ノ点 t ハ $n\to\infty$ ナルトキ算術平均ノイミデ（コレハ後ニナッテカラ算術平均ヲ取ル必要ノナイコトガワカル）E_α 内 遷移サレルコトヲ示シ(32)ハ一旦 E_α 内ヘハイッタ点ハモハヤ決シテ E_α ノ外ヘハ出ナイコトヲ示シテヰル。更ニ(33)ニヨリ E_α ハコノヤウナ性質（特ニ(32)）ヲモッタ二ツノ集合ニ分割出来ナイコトヲ示シテヰル. 最後ニ (34)ノ性質ハ後ニナッテカラモット強イ結果.

$$\underset{t\in\Omega}{\mathrm{l.u.b.}}\ \mathrm{P}^{(n)}(t,\Delta)\leqq\frac{M}{(1+\varepsilon)^n},\quad n=1,2,\cdots\cdots,$$

（M, ε ハ正ノ常數）

ニヨッテオキカヘラレルコトガワカル. コノ樣ナ性質ヲモッコトヨリ E_α 及ビ Δ ハ夫々 ergodic kernel 及ビ dissipative part ト呼ベレル. ergodic kernel ハ Doeblin ガ ensemble final ト呼ンダ

モノト同ジデアル。(ergodic part ノ方ハ新シク導入サレタ概念デアル) コヽニ注意スベキハ ergodic kernel が measure zero ノ集合ヲ除イテ定マルノデアルが ergodic part ハ一点ノ ambiguity モナク定義サレテヰルコトデアル。コレハ ergodic kernel E_α が $(\mathfrak{M})$ ニ属スル函数 $x_\alpha(E)$ ニヨツテ定義セラレルニ反シ ergodic part $\bar{E}_\alpha$ が (M^*) ニ属スル函数 $y_\alpha(t)$ ニヨツテ定義サレルコトが原因デアル。

$\boxed{\text{定理4ノ証明}}$ E_α^0 ヲ $\bar{E}_\alpha$ ノ部分集合 E デ $x_\alpha(E)=1$ ヲ満足スルモノヽウチ measure ノ最小ノモノトセヨ，コノ E_α^0 ニ対シテ (31), (33) ハ明カニ満足サレテヰルが (32) ハ必ズシモ満足サレテヰナイ。(32) ヲモ満足スル如キ Borel 集合ヲ求メルタメ $E_\alpha^0 \supset E_\alpha^1 \supset \cdots\cdots \supset E_\alpha^n \supset \cdots\cdots$ ナル如キ Borel 集合ノ系列ヲ mathematical induction ニヨツテ定義スル。先ヅ E_α^0 ハ既ニ定義サレテ $x_\alpha(E_\alpha^0)=1$ ヲ満足シテヰル。

次ニ E_α^n が既ニ定義サレテ $x_\alpha(E_\alpha^n)=1$ ヲ満足シテヰルモノトセヨ。E_α^{n+1} ハ $P(t, E_\alpha^n)=1$ ヲ満足スル如キ E_α^n ノ点 t 全体ノ集合トシテ定義スル。然ルトキハ明カニ E_α^{n+1} ハ E_α^n ノ部分 Borel 集合デ且ツ

$$\int_{E_\alpha^n} x_\alpha(dt)P(t, E_\alpha^n) = \int_{\Omega} x_\alpha(dt)P(t, E_\alpha^n)$$

$$= x_\alpha(E_\alpha^n) = 1$$

トル故 Lemma 4 ニヨツテ $x_\alpha(E_\alpha^{n+1})=1$ トナル。此

ノ如クシテ $\{E_\alpha^n\}$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ヲ作ッタ上デ

$E_\alpha^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} E_\alpha^n$ トオク.

E_α^∞ ハ明カニ E_α^0 ノ部分 Borel 集合ダ且ッ $X_\alpha(E_\alpha^\infty)=1$ ヲ満足シテヰル。

$$\left(X_\alpha(E_\alpha^\infty)=\lim_{n\to\infty} X_\alpha(E_\alpha^n)\right)$$

更ニ $t \in E_\alpha^\infty$ トルトキ $P(t, E_\alpha^\infty)=1$ ガ成立スル. 何トナレバ $E_\alpha^\infty \subset E_\alpha^{n+1}$ ナルコトヨリ $t \in E_\alpha^\infty$ ナルトキハ $P(t, E_\alpha^n)=1$. ヨッテ $P(t, E_\alpha^\infty)=\lim_{n\to\infty} P(t, E_\alpha^n)=1$.

此ノ如クシテ $E_\alpha = E_\alpha^\infty$ ガ (31), (32), (33) ノ性質ヲモッテヰルコトガワカッタ。(34) ハ $X_\alpha(\Delta)=0$ $(\alpha=1, 2, \cdots\cdots, l)$ ナルコトヨリ殆ド明カデアロウ

——(未完)——