# 814. Mannigfaltigkeit ヘノ連續変換

小松　醇郎（阪大）

Sphäre ヘノ連続変換ハ Sphäre ノ特殊ノ性質ノ故ニ 0-Zyklus ヲ使ッテ奇麗ニ取リ扱フコトが出來ル、此ノ取扱ヒニハ如何ナル性質が本質的ニ必要デアラウカ、コレヲ Mannigfaltigkeit ニ就イテ調ベルコトニスル。

(1) Definierender Zyklus, halt Zyklus.

Mannigfaltigkeit $M^n$ ハ definierender Zyklus $Z^{n-1}$ ニヨリ一意ニ定メラル。ソノ $Z^{n-1}$ ハ $S^{n-1}$ ノ点ヲ適當ニ互ヒニ Identifizieren シテ生ズルモノデアル. $n$ 次元 Vollkugel $V^n$ ヲトリソノ Rand $S^{n-1}$ ヲ今ノ如ク Identifizieren シテ $Z^{n-1}$ ヲ作ル. 斯クスル事ニ依ッテ凡ベテノ $M^n$ ハ生ズル。

（証明略）

一ツノ $M^n$ ニ對シ如何ナル $Z^{n-1}$ が起リ得ルカ。

$M^n$ ヲ作ルマシナ, $S^{n-1}$ ノ Identifizierung ハ如何ナル條件ヲ必要トスルカ。

等ノ問題が生ズル。

$M^n$ ハ Vollkugel $V^n$ ノ Rand ノ Identifizierung ニヨリ生ズル. 從ッテ $K^{n-1} \longrightarrow M^n$ ヘ連続変換サレタトキ, ソレト等シイ Abbildungsklasse ノ中ニ $K^{n-1} \longrightarrow Z^{n-1}$ ナル連続変換が存在スル. 然ラ

バ

$K^n \supset K^{n-1}$, $f: K^{n-1} \longrightarrow Z^{n-1}$ 與ヘラレタトキ $f$ ガ $K^n$ マデ $M^n$ ニ關シ *erweitern* 出來ルタメノ必要且十分ナ條件ハ何カトイフ問題モ生ズル。

(II) $f: K^n \longrightarrow M^n$ (*orientierbar*) ガ與ヘラレ且ツ $f(K^{n-1}) \subset Z^{n-1}$ トスル。然ラバ各 $n$ 次元單体 $T_i^n$ ニ對シ

$f(\dot{T}_i^{n-1}) \subset Z^{n-1}$, $f(T_i^n) \subset M^n$, ヨリ mod $\dot{T}_i$ ニ關シ *Abbildungsgrad* $m_i$ ガ一意ニ定マル。[1]

對應 $f^n: T_i^n \longrightarrow m_i$

ハ 0 − *Zyklus* デアル。

<u>定理</u>. 連續変換 $f: K^n \longrightarrow M^n$ ガ *wesentlich auf* デアルタメノ必要且十分ナ條件ハ 0 − *Zyklus* $f^n \nsim 0$ ナルコトデアル。

證明 i) $f$ ガ *wesentlich auf* デナイナラバ $f^n \sim 0$ デアル. $f$ ト等シイ *Klasse* ニアル *Abbildung* $f'$ デ $K^n$ ハ $Z^{n-1}$ ニ移ル。然ラバ各 $n$ 次元單体 $T_i^n$ ニ對シ *topologisches Produkt* $T_i^n \times \langle 0, 1 \rangle$ ノ $M^n$ ヘノ連續変換 $\varphi$ ガ存在シ

$$\varphi(T_i^n \times 0) = f(T_i^n)$$

$$\varphi(T_i^n \times 1) \subset Z^{n-1}$$

---

1) *grad* ガ同一デモ $T^n \longrightarrow M^n$, *Abbildung* ハ mod $\dot{T}^n$ デ一意トハ限ラナイ. 是ガ *Sphäre* ト異ル所デアル。

$$\varphi(T_j^{n-2}\times\langle 0,1\rangle)\subset Z^{n-1}$$

ヲ充ス．故ニ$T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle$ニ對シ$\varphi$ニヨリ$M^n$ヘノ grad $n_k$ガ定マル．シカラバ$\varphi(T_i^n\times\langle 0,1\rangle)\subset M^n$ニヨリ$T_i^n\times\langle 0,1\rangle$ノ境界即チ

$$T_i^n\times 0+\sum_k T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle+T_i^n\times 1$$ [2)]

ハ$\varphi$ニヨリ Abbildungsgrad 0.

故ニ　$m_i+\sum n_k=0$

今$(n-1)$次元代数複体$f^{n-1}: T_k^{n-1}\longrightarrow -n_k$ヲトレバ

$$f^n=g_0 f^{n-1}$$

ii) $f^n\sim 0$ ナラバ $f$ ハ wesentlich auf デ無イ。

各$T_i^n$ニ對シ$T_i^n\times\langle 0,1\rangle$ノ連続変換$\varphi$ガ次ノ如ク作レレバ良イ。

$$\varphi(T_i^n\times 0)=f(T_i^n)$$

$$\varphi(T_i^n\times 1)\subset Z^{n-1}$$

先ヅ$T_k^{n-1}<T_i^n$ニ對シ$\varphi(T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle)$ヲ作ル．假定カラ

$$g_0 f^{n-1}=f^n,\quad f^{n-1}: T_k^{n-1}\longrightarrow n_k$$ トスレバ

---

2) 二ツノ単体$T_1^n, T_2^n$ガ grad $m_1, m_2$．何レモ境界ハ$Z^{n-1}$ニ移ッテ居ル．然ラバ$T_1^n+T_2^n$ヲ一ツノ$T^n$ト考ヘレバ grad ハ $m_1+m_2$

$\varphi(T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle)$ ノ Grad $-n_k$ ナル様ニ容易ニシ得ル。勿論 $\varphi(T_k^{n-1}\times 1)\subset Z^{n-1}$

然ラバ $T_i^n\times 0-\sum_k T_k^{n-1}\times\langle 0,1\rangle$ ハ一ツノ $n$ 次元 Vollkugel $V^n$ ト考ヘラレソノ境界 $\sum_k T_k^{n-1}\times 1$ ハ $\varphi$ デ $Z^{n-1}$ ニ移ツタ。且ツ $\varphi(V^n)$ ノ $M^n$ ヘノ Grad $0$.
故ニ $\sum_k T_k^{n-1}\times 1$ ノ Bild ヲ変ヘズニ $V^n$ ノ Bild ヲ stetig ニ $Z^{n-1}$ ニ deform スルヲ得. ソノ Deformation ノ途中ヲ $\varphi(T_i^n\times\langle 0,1\rangle)$ ノ Bild ニトレバ Deformation ノ最後ノ位置ガ $\varphi(T_i^n\times 1)\subset Z^{n-1}$ トナル。

—— 以上 ——

(III) Abbildung ノ Wesentlichkeitsdimension.

$$f: K^m\longrightarrow M^n.$$

$f$ ト等シイ Klasse ノ中ノ Abbildung デソノ Bild ノ dimension ガ $p\ (\leqq n, m)$ ナルモノハ存在スルガ決シテ $p-1$ ニナルモノガ存在シナイトキ $f$ ノ Wesentlichkeitsdimension ハ $p$ デアルトイフ。$f$ ノ Wesentlichkeitsdimension ガ $0$ ト云フコトハ $f$ ガ unwesentlich, homotop Null ナルコトデアル。(II) ニ於ケル wesentlich auf ハ Wesentlichkeitsdimension $n$ ナルコトデアル。

$M^n$ ガ $S^n$ ト異ナルベッチ数ヲ持ツナラバ任意ノ変換 $f: S^n\longrightarrow M^n$ ノ Wesentlichkeitsdimension $< n$

デアル。[3]

$S^{n+1} \longrightarrow M^n$ ノトキハ如何ニナルカ分ラナイ。

<u>定理</u>. $K^n$ ガ $M^n$ ヘ Wesentlichkeitsdimension $n$ デ連続変換サレルナラバ $K^n$ ノ中ニ u-Zyklus $Z^n \neq 0$ in bezug auf $P_1$ ガ存在シ $Z^n$ ハ $M^n$ ヘ wesentlich auf ニ移ル。

<u>証明</u>. $f: K^n \longrightarrow M^n$ wesentlich auf ダトスル。

今 $B^n_u(K^n, P_1) = 0$ ト假定スル。サテ $f$ ニヨリ $K^n$ ＝ o-Zyklus $f^n$ ガ（(ロ) ノ定義）存在スル、假定ニヨリ $f^n \sim 0$ トナル。然ラバ (II) ノ定理ノ第二段ニヨリ $f$ ハ wesentlich auf デハナクナル。是ハイケナイ。

故ニ $B^n_u(K^n, P_1) \neq 0$. $Z^n \neq 0$ ガ存在スル。

次ニ $f^n \neq 0$ トナッタガ o-Zyklus ハ $B^n_u(K^n, P_1)$ ノ $P_1$ ヘノ一ツノ charakter, $f^n \neq 0$ ナルコトハ或ル u-Zyklus $Z^n \longrightarrow \alpha \neq 0 \in P_1$ ナル Charakter ナルコトデアル。然ラバソノ <u>Zyklus $Z^n$ ハ $f$ デ $M^n$ ニ wesentlich auf</u> デアル。wesentlich auf デナイナラバ、$Z^n$ ダケヲ考ヘレバ $f^n$ (Teilkomplex $Z^n$ ダケノ) $\sim 0$　故ニ $f^n$ ナル Charakter デ $Z^n \longrightarrow 0 \in P_1$. 是 $f^n$ ガ $Z^n \longrightarrow \alpha \neq 0$ ナル Charakter

---

3) H. Hopf: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten Crelle. 163.

ニ矛盾。 —— 以上 ——

(IV) $K^m \supset K^n$, $f: K^n \longrightarrow M^n$.

定理. $M^n$ ガ $S^n$ ト異ナルベッチ數ヲ持ツナラバ $f$ ニヨル代數複体 $f^n$ (II ニ於ケル定義) ハ 0-Zyklus デアル。($K^{n+1}$ ニ erweitern 出來ナクテモ)。

証明. $\dot{T}_i^{n+1} = \sum_j T_j^n$ ハ一ツノ $S^n$

$M^n$ ガ $S^n$ ト異ナルベッチ數ヲ持ツナラバ $f(S^n)$ ハ必ズ grad 0. 即チ Wesentlichkeitsdimension $< n$.

然ルニ $g_0 f^n(T_i^{n+1}) = \sum_j f^n(T_j^n) = \sum_j m_j$.

茲ニ $m_j$ ハ $T_j^n$ ニヨル grad.

故ニ $\sum m_j = 0$

(V) $M^n$ ガ $(r+1), \cdots\cdots, m$ simple[4] デアルトスル。然ラバ $(r+2), \cdots\cdots, m$ Hindernis ガ定義出來ル。

$$K^m \supset K^r \xrightarrow{f} M^n$$

$f$ ハ $K^{r+1}$ ニ erweitern 出來ルトスル。

$F(K^{r+1}) \subset M^n$

---

4) S. Eilenberg: On the relation between the fundamental group on a space and the higher homotopy groups. Fund. Math. 32.

安倍亮:

各 $T_i^{r+2}$ ニ對シ $F(\dot{T}_i^{r+2}) \subset M^n$. 故ニ $M^n$ ノ $(r+1)$ 次 *Homotopiegruppe* $\pi^{r+1}(M^n)$ ノ元 $\alpha_i$ ヲ定メル。

$$\text{對應 } f^{r+2} : T_i^{r+2} \longrightarrow \alpha_i$$

ハ一ツノ代數複体デアル。

<u>定理</u>. 代數複体 $f^{r+2}$ ハ 0-*Zyklus* デアル。

<u>証明</u>. 略. $(r+1)$-*Simple* ナル故出來ル。

0-*Zyklus* $f^{r+2}$ ヲ $(r+2)$-*Hindernis* ト云フ。

<u>定理</u>. $K^r \xrightarrow{f} M^n$ ガ $K^{r+1}$ 迄 *erweitern* 出來ル. 二ツノ *Erweiterung* $F_1$, $F_2$ ニヨリ二ツノ $(r+2)$ *Hindernisse* $f_1^{r+2}$, $f_2^{r+2}$ ガ生ズル. 然ラバ

$$f_1^{r+2} \sim f_2^{r+2}$$

<u>定理</u>. $F$ ガ又 $K^{r+2}$ マデ *erweitern* 出來ルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ *Hindernis* $f^{r+2} \equiv 0$ ナルコトデアル。

此処ノ定理ハ *Sphäre* ノ場合ト同様ニ証明出來ル, 即チ *Hindernis* ニハ "*simple*" ナル條件ガ必要且ツ十分デアル。從ツテ *simple* ナ *Komplex* ニツイテモ言ヘルコトデアル。