823. Covering theorem ニ就テ

中野 秀五郎（東大）

今來タ全國紙上數學談話會189号ヲ見ルト，角谷君ガ"Wiener及ビVitaliノcovering theoremニ就イテ"ナル表題ニテWienerノ定理トシテ次ノ定理ヲ擧ゲテ居ル。

定理（Wiener）　Aヲm次元ノEuclid空間R^m内ノ有界集合（必ズシモmeasurableデハナイ）トスルトキ，若シ任意ノ$x \in A$ニ對シテxヲ中心トスル半徑$r(x) > 0$（$r(x)$ハxト共ニ變化スルコトヲ許スモノトス）ノsphere $S(x) \equiv S(x, r(x))$ガ對應スレバ$\{S(x)\}$，$x \in A$ノウチカラ有限個ノ何レノ二ツモ互ニ共通点ヲモタヌsphere $S(x_1)$, $S(x_2)$, ……

$\ldots\ldots, S(x_n)$ ヲ選ンデ

$$\sum_{i=1}^{m} m(S(x_i)) > \alpha_m \; m^*(A)$$

トナルヤウニスルコトガ出来ル。ココニ $m(S)$ ハ S ノ measure（即チ volume），$m^*(A)$ ハ A ノ outer measure ヲ表ハシ、$\alpha_m > 0$ ハ R^m ノ dimension m ノミニ depend スル constant デアル。

所ガ私ガ既ニ東京物理学校雑誌第五百七十一号ニて "Riemann 積分ヨリ Lebesgue 積分へ VII"（コレハ私ガ昭和十三年三月物理学校へ原稿ヲ送リシガ、如何ナルワケカ中々出版サレズ、十四年六月ヤット印刷サレタルモノナリ）ナル表題ニテ measure ヲ用ヒズシテ Lebesgue 積分ヲ論ズルニ付、Vitali ノ covering theorem ニ対スルモノトシテ、次ノ補定理ヲ挙ゲタ。

補定理　有界点集合 A アリテ、ソノ各点ニ其ノ点ヲ含ム正方形ガ対応セシメラレタルトキ、其等正方形ノ高々可附番個 $l_1, l_2, \ldots\ldots$ ヲ適当ニ選ベバ、コレ等何レノ二ツモ共有点ナク、シカモ l_n ト同一中心ニテ辺ノ長サ三倍ナル正方形 l'_n トセバ、A ハ $l'_1, l'_2, \ldots\ldots$ ニテ掩ハル。

此ノ定理ハ二次元ニテ論ジタルモ、其ノ方法ハ其ノ儘一般 n 次元ニモ適用サレ、又 $l_1, l_2, \ldots\ldots$ ヲ正方形トセシモ、此レ等ガ球ナルトキモ、全然同様ニシテ、其ノ場合 $l'_1, l'_2, \ldots\ldots$ ハ夫々 $l_1, l_2, \ldots\ldots$ ト同心ニテ半径ヲ

三倍トセルモノトスレバ可ナリ。

Wiener ノ定理ハコノ補定理ニ含マレル様ニ思ハル。然カモ Wiener ノ定理ニ於ケル α_n ハ $\frac{1}{3^n}$ ニテ可ナルコトが知ラレル。又 $l_1, l_2, \cdots\cdots$ が可附番個ナルモ、充分大ナル n ニ對シテ、$l_1, l_2, \cdots\cdots, l_n$ が既ニ Wiener ノ定理ヲ充タスコトモ明カナリ。

次ニ此補定理ノ証明ヲ擧ゲル。

補定理ノ証明: Lindelöf ノ covering theorem ニヨリ有界点集合Aハ其等正方形（或ハ球）ノ高々可附番個 $d_1, d_2, \cdots\cdots$ ニテ覆ハレ、然カモ $d_1, d_2, \cdots\cdots$ が其大サノ順。即チ n ト共ニ大サが大キクナラヌが如キ順トス。先ヅ d_1 ヲ l_1 トシ、次ニ $d_1, d_2, \cdots\cdots$ ノ中 l_1'（l_1 ト同心大さ三倍ノ正方形或は球）ニ含マレザル最初ノ d_n ヲ l_2 トシ、次ニ l_1', l_2'（l_2' ハ l_2 ト同心大サ三倍ノ正方形或ハ球）ノ何レニモ含マレザル最初ノ d_n ヲ l_3 トスル。以下コノ如クニシテ、$l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots$ ヲ定ムレバ、点集合Aハ $l_1', l_2', \cdots\cdots$ ニテ覆ハレ、然カモ $l_1, l_2, \cdots\cdots$ ノ何レノ二ツモ共有点ナシ。