833. A. N. Kolmogoroff: 可附番無限個ノ可能ナ狀態ヲ持ツ Markoff 連鎖

樋口 順四郎 訳（阪大）

A. Kolmogoroff ハ Recueil Math. (1(43) (1936) 607—610) ニ Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen ト題スル論文ヲ發表シマシタガ，ソコデハ詳細ナ説明ハ述ベズ，Bulletin de l'université d'état à Moscou (sec A, vol. 1, 1937) ノ論文 Cepi Markova so sčetnym čislom vozmoznych sostojanij (Chaînes de Markoff avec une infinité dénombrable des états possibles) デ始メテソノ詳細ヲ述ベテヰマス。以下ハソノ飜訳デス。

§1. 記號

考察ノ對象トナル system ノ個々ノ可能ナ狀態ヲ E_i デ表ハス。茲ニ i ハスベテノ自然数ヲ動クモノトスル。トハイヘ，i ガ有限ノ値ニ止マル場合ニモ，後述ノ議論ハ有效デアロウ。コノ場合ニハ議論ヲ簡略ニナシ得ルコト明カデアラウ。E_i カラ E_j ヘ one step デノ遷移確率 p_{ij} ハ

$$p_{ij} \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_j p_{ij} = 1 \tag{2}$$

ヲ満足スル。 E_i カラ E_j ヘ n step デ遷移確率 $P_{ij}^{(n)}$ ハ次ノ等式デ帰納的ニ定義サレル。

$$P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \begin{cases} =1 & i=j \\ =0 & i \neq j \end{cases} \qquad (3)$$

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k} P_{ik}^{(n)} P_{kj} \qquad (4)$$

更ニ E_i カラ E_j ヘ n step デ始メテ遷移スル確率ヲ $K_{ij}^{(n)}$ デ表ハス。明ラカ

$$K_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)} - K_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} - \cdots\cdots - K_{ij}^{(n-1)} P_{jj}^{(1)} \qquad (5)$$

特ニ K_{ij} ハ状態 E_i カラ出テ n step 後ニハジメテモトノ E_i ヘ戻ル確率デアル。尚

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{ij}^{(n)} = L_{ij}$$

ト書ク。 $L_{ij}=1$ デアレバ system ハ状態 E_i カラ出テ早晩状態 E_j ヘ到達シナケレバナラナイ。 E_i カラ E_j ヘ遷移スルニ必要ナ step 数ノ数学的期待値ハ

$$M_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n K_{ij}^{(n)} \qquad (7)$$

デアル。特ニ M_{ii} ハ最初 E_i ニアッタモノガ，E_i ヘ戻ルニ要スル step ノ数ノ数学的期待値デアル。 M_{ij} ハ有限ニモ無限ニモナリ得ル。

§2. 非本質的状態，本質的状態ノくらす及

ビ部分くらす.

$P_{ij}^{(n)}>0$ トナル n, j ハ存在スルガ, 凡テノ m ニ就キ $P_{ji}^{(m)}=0$ デアルトキ, 即チ E_i カラ E_j ヘノ遷移可能デアルガ, E_j カラ E_i ヘハ遷レナイ場合ニ状態 E_i ハ本質的(essential)デナイト称スル。ソノ他ノ状態ハ essential デアルト云フ。E_i, E_j ガ共ニ essential デ $P_{ij}^{(n)}>0$ トナル n ガ存在スルナラバ, $P_{ji}^{(m)}>0$ トナル m ガ又存在シナケレバナラヌ事ハ明ラカデアル。コノヤウナ n 及ビ m ガ存在スル場合ニ E_i 及ビ E_j ハ mutually connected デアルト云フ。

今 E_i ト E_j トガ互ニ connected デ, E_j ガ E_k ト connected デアレバ, E_i ト E_k ハ又互ニ connected デアル。故ニスベテノ essential ナ状態ハくらす $S^{(\alpha)}$ ニ分タレ, 一ツノくらすニ属スルモノハ互ニ connected デアリ, 異ルくらすニ属スルモノトハ connected デナイ. 加之, essential ナ状態 E_i ト essential デナイ状態 E_j トニ対シテハ明ラカニ $P_{ij}^{(n)}=0$ デアル. 此ノ様ニシテ吾々ノ system ハ一度くらす $S^{(\alpha)}$ ノ何レカニ入レバ決シテソノくらすノ埒外ニ出ルコトハナイ。

次ニ任意ノ essential ナ状態 E_i ヲ考ヘヨウ。$P_{ii}^{(n)}>0$ トナル n ノ集合ヲ $\mathfrak{M}_i$ トスレバ, E_i ハ essential デアルカラ $\mathfrak{M}_i$ ハ空デハナイ. $n, m \in \mathfrak{M}_i$ デアレバ $n+m \in \mathfrak{M}_i$ デアル. d_i ヲ $\mathfrak{M}_i$ ニ属スル数ノ最大公約数トスルト,

m_i ハ d_i ノ倍数ノミカラナリ，充分ニ大キナ d_i ノ倍数ハ m_i ニ属スルコトガ容易ニ証明サレル。数 d_i ハ状態 E_i ノ周期ト呼バレル。

同一ノくらす $S^{(\alpha)}$ ニ属スル総テノ状態ハ同一ノ周期ヲ持ツコトガ容易ニ証明デキテ，コノ共通ノ周期ヲくらす $S^{(\alpha)}$ ノ周期ト称シ $d(\alpha)$ ト書ク．実際，二ツノ状態 E_i，E_j ガ同一ノくらす $S^{(\alpha)}$ ニ属スルナラ $P_{ij}^{(n)}>0$ 及ビ $P^{(m)}>0$ トナル n，m ヲ見出スコトガ出来ル（コノ様ナ n，m ハ前ニ述ベタ通リ存在スル）．k ガ充分大キケレバ $P_{jj}^{(kd_j)}>0$ デアルカラ，従ッテ又

$$P_{ii}^{(kd_j+n+m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(kd_j)} P_{ji}^{(m)} > 0,$$

即チ充分大キナ k ニ對シテ kd_j+n+m ノ形ノ数ハ m_i ニ属スル．シカシコレハ d_j ガ d_i デ割リ切レルトキニ限リ可能デアル。同様ナ理由デ d_i ハ d_j デ割リ切レナクテハナラナイ．即チ $d_i=d_j$ デアル。

同一ノくらす $S^{(\alpha)}$ ニ属スル二ツノ状態 E_i，E_j ニ対シ同時ニ $P_{ij}^{(n)}>0$ 及ビ $P_{ji}^{(m)}>0$ トナルノハ n ト m ガ mod. $d(\alpha)$ デ congruent ナトキニ限ル。故ニ $S^{(\alpha)}$ カラ勝手ニ E_{i_0} ヲ一ツ取リ出セバ，同一くらすノ E_i ニ対シテハ $P_{i_0 i}^{(n)}>0$ トナルノハ $n\equiv\beta(E_i)$ (mod. $d(\alpha)$) ノ時ニ限ルヤウナ $\beta(E_i)=1,2,\cdots\cdots d(\alpha)$ ガ定マル．同ジ $\beta(E_j)$ ヲ持ツ状態 E_j ノスベテヲ部分くらす $S_\beta^{(\alpha)}$ ニ属セシメル。斯ノ様ニ $S^{(\alpha)}$ ハ $d(\alpha)$ 個ノ部分くらす $S_\beta^{(\alpha)}$ ニ分レル。吾

タノ system ハ各 step ニ於テ，$S_\beta^{(\alpha)}$ ニ属スルアル状態カラバ必ズ $S_{\beta+1}^{(\alpha)}$ ノ，ソレニ遷移スル．但シ $\beta=d(\alpha)$ ノ時ハ $S_1^{(\alpha)}$ ノ一ツニ遷ル．カクシテ E_i, E_j が部分くらす $S_\beta^{(\alpha)}$, $S_\gamma^{(\alpha)}$ ニ属スレバ，$P_{ij}^{(n)}$ ハ $n\equiv\gamma-\beta\ (\mathrm{mod.}\ d(\alpha))$ ノ時ニ限ツテ 0 ト異ル．又一方充分大キナ上述ノ合同式ヲ満スnニ対シテハ $P_{ij}^{(n)}>0$ デアル。

§3. 再帰及ビ非再帰くらす

状態 E_i ヲ出テ何時カハ一度 E_j ヲ訪レル確率 L_{ij} ノ他ニ，E_i ヲ発シテ E_j ヲ無限ニ訪レル確率 Ω_{ij} ヲ考察シヨウ。明ラカニ不等式；

$$\Omega_{ij}\leqq L_{ij} \tag{8}$$

が成立スル。一方吾々ハ此処デ次ノ lemma ヲ証明シヨウ。

$\boxed{\textit{Lemma I}}$　$L_{ii}=1$ ナラバ $\Omega_{ii}=1$ デアル。

証明：　E_i ヲ出タノチ，少クトモ k 回同一ノ状態 E_i ヲ訪レル確率ヲ $T_{(k)}$ ト書ク．常ニ

$$T_{(1)}=L_{ii},\ T_{(k+1)}=T_{(k)}L_{ii},\ \Omega_{ii}=\lim_{k\to+\infty}T_{(k)}$$

デアルコトハ明ラカデアル。$L_{ii}=1$ ノ場合ニハ上ノ式カラ $\Omega_{ii}=1$ デアルコト明白デアル。

此ノぱらぐらふ及ビ次ノ若干ノぱらぐらふニ於テハ専ラ essential element ノ各くらす内デノ相互関係ノミニ関心ヲ持ツ。換言スレバ，状態ニ関スルすべてノ index

ハタミーツノくらす内ノソレノミヲ動クモノト仮定スル。定理ノ叙述デハコレヲ〝一ツノくらすノ範囲内ニ於テ〟ト云フ言葉デ表現スル。

$\boxed{\text{定理 I c}}$ 一ツノくらすノ範囲内ニ於テハ，スベテノ $\mathfrak{R}_{ij}<1$ デアルカ，或ヒハスベテノ $\mathfrak{R}_{ij}=1$ デアルカノ何レカデアル。

証明： 任意ノ i, j, k ニ對シテ次ノ関係ヲ言ヘバ充分デアルコト明ラカデアル。

1） $\mathfrak{R}_{ij}=1$ ナラバ $\mathfrak{R}_{ik}=1$

2） $\mathfrak{R}_{ji}=1$ ナラバ $\mathfrak{R}_{ki}=1$

モシコノ二ツガ成立スレバ，任意ノ i, j, i', j' ニ対シテ，$\mathfrak{R}_{ij}=1$ ナラバ $\mathfrak{R}_{ij'}=1$，従ッテ $\mathfrak{R}_{i'j'}=1$ トナル。

1）ノ証明ニ移ラウ．$\mathfrak{R}_{ij}=1$，即チ確率1ヲ以テ，状態 E_i ヲ出タ後ニ E_j ニ無限ニカヘルト假定スル。E_j ヘノ s 回ト $s+1$ 回ノ復帰ノ途中ヲ考ヘヨウ。考ヘテキル状態ハスベテ同一ノくらすニ属スルカラ，E_j ヘノ s 回ト $s+1$ 回ノ復歸ノ途中デ，特定ノ状態 E_k ヲ訪レル事象 $\mathfrak{V}_s$ ハ正ノ確率ヲ持ツ。コノ確率ハ s ニハ無関係デ，$\mathfrak{V}_s$ 自身モ亦 s ヲ変ヘタトキ互ニ独立デアルコトハ容易ニ認メルコトが出来ル。シカルニ同一ノ正ノ生起ノ確率ヲ持ツ事象 $\mathfrak{V}_s$ ノ系列中ノ無限ニ多クハ確率1ヲ以テ実現サレル*，即チ $\mathfrak{R}_{ik}=1$ デ証明

---

* Borel-Cantelli ノ定理（訳者註）

スベキ事柄ニ他ナラヌ。

残ルハ 2)ノ証明デアル。ソレニハ任意ノ i, j, k, n ニ就キ成立スル次式ヲ利用スル。

$$\Omega_{ji} = \sum_k P_{jk}^{(n)} \Omega_{ki} \qquad (9)$$

$\sum_k P_{jk}^{(n)} = 1$ デアルカラ，$\Omega_{ji} = 1$ デアルナラバ，$P_{jk}^{(n)} > 0$ トナルスベテノ k ニ対シテ $\Omega_{ki} = 1$ デナケレバナラナイ．シカモ（同一くらすノ範囲デ）任意ノ j, k ニ対シテハコノ様ナル n ハ存在スル．斯クシテ 2)，ソレト同時ニ定理 I a が証明出来タ。

モシスベテノ $\Omega_{ij} = 1$ デアレバ，不等式 (8) ニ依リスベテノ $L_{ij} = 1$ デナケレバナラヌ。モシ又スベテノ $\Omega_{ij} < 1$ ナラバ Lemma 1 ニヨリスベテノ $L_{ij} < 1$ デナケレバナラヌ。依ッテ

$\boxed{\text{定理 I } b}$ 一ツノくらすノ範囲内ニ於テハ，スベテノ $L_{ii} < 1$ デアルカ，或ヒハスベテノ $L_{ij} = 1$ デアルカノ何レカデアル。

スベテノ $L_{ii} < 1$ ノ場合ニハ，$L_{ij} = 1 \ (i \neq j)$ トナリ得ルコトハ指摘シテオクベキデアロウ。

スベテノ $L_{ij} = 1$ 及ビスベテノ $\Omega_{ij} = 1$ デアレバ，再帰くらす（vozvratnyj klass）ト云フ．之レニ反シスベテノ $L_{ij} < 1$, $\Omega_{ij} < 1$ ノ時ニハ，非再帰くらすト呼バレル．状態 E_j が非再帰くらすニ属シ，E_i が任意ノ時ニ

$$\lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)}=0$$

デアルコトハ容易ニ確認スルコトガデキル。

§4. 正くらす及ビぬるくらす

此ノぱらぐらふデハ再帰くらすノ各々ノ内部ニ観察サレル現象ヲ考ヘル．ソノ結果トシテ再帰くらすハ正及ビぬる(null)ノ二ツニ分割サレル。然シ次ノぱらぐらふデハぬるくらすト同時ニスベテノ非再帰くらすニモ触レルコトヲ注意シテオク。

再帰くらすヲ研究スルトキニ，数学的期望値 M_{ij} (9) 参照）ハ基本的ナ意味ヲモツ．ソレニ関聯シテ吾々ハ平均

$$\Pi_{ij}^{(n)}=\frac{1}{n}\left(P_{ij}^{(1)}+P_{ij}^{(2)}+\cdots\cdots+P_{ij}^{(n)}\right) \qquad (10)$$

ヲ考ヘヨウ。

$\boxed{\text{Lemma II}}$ 再帰くらすノ任意ノ E_i ニ対シ，M_{ii} ガ有限ナラバ

$$\lim_{n\to+\infty} \Pi_{ii}^{(n)}=\frac{1}{M_{ii}}\ ;$$

$M_{ii}=+\infty$ デアレバ

$$\lim_{n\to+\infty} \Pi_{ii}^{(n)}=0$$

証明：　状態 E_i カラ出発シテ，同一ノ状態ニ無限ニ帰

ソラクル確率ハ1ニ等シイ。最初ノ復帰ガ n_1^{th} step ニ，第二回ガ n_2^{th} step ニ，一般ニ第 k 回ガ n_k^{th} step ニ起ルトスル。

$$x_1 = n_1,\quad x_2 = n_2 - n_1,\ \cdots\ x_k = n_k - n_{k-1},\ \cdots$$

ナル差ハ，互ニ独立デ、スベテニ對シテ同一ノ分布ノ法則：$X_k = s$ ガ確率 $K_{ii}^{(s)}$ ヲモツ variable aléatoire ノ系列デアル。明ラカニ，M_{ii} ハ x_k ノ数学的期望値ニ他ナラヌ。

最初 variable aléatoire X_k ノ数学的期望値 M_{ii} ガ有限ナ場合ヲ考ヘル。コノ時ハ A. Khintchine（ひんちん）ノ定理*ニ依リ系列 $\{x_k\}$ ハ大数ノ法則ニ従フ。即チ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シ k_0 ガ存在シ，$k > k_0$ ナラバ

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j - M_{ii}\right| = \left|\frac{n_k}{k} - M_{ii}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

トナル確率ハ ε ヨリ小サイ。$\varepsilon < \frac{1}{2}$ 及ビ $n \geq n_0 = 2k_0 M_{ii}$ トシ，

$$k' = \frac{n}{M_{ii}}(1-\varepsilon),\quad k'' = \frac{n}{M_{ii}}(1+\varepsilon)$$

トオケバ $k' \geq k_0$，$k'' \geq k_0$ デアルコトハ容易ニ分ル。故ニ $1-\varepsilon$ ヨリ大キナ確率ヲモッテ次ノ不等式ガ成立スルコトガ認メラレル。

$$\left|\frac{n_{k'}}{k'} - M_{ii}\right| < \varepsilon,$$

---

* C.R. Paris 188, p. 477 參照

シカルニコノ不等式カラ（$M_{ii} \geqq 1$ デアルカラ）

$$\left| n_{k'} - n(1-\varepsilon) \right| < k'\varepsilon \leqq n\varepsilon$$

ガ従ヒ，コレカラ

$$n'_{k} < n$$

同様ニ，$1-\varepsilon$ ヨリ大キナ確率ヲモツテ

$$\left| \frac{n_{k''}}{k''} - M_{ii} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| n_{k''} - n(1+\varepsilon) \right| < \frac{k''\varepsilon}{2} \leqq n\varepsilon,$$

$$n_{k''} > n$$

ガ成立スル。カクシテ $n \geqq n_0$ ナラバ $1-2\varepsilon$ ヨリ大キナ確率デ

$$n_{k'} < n < n_{k''}$$

ガ成立スル．即チ最初ノ n step 後マデニ状態 E_i ヘ帰ツテクル回数 ψ_n ハ k' ト k'' ト ノ間ニアル．最初ノ n step ノ間ニ状態 E_i ヘカヘル頻度（Frequenz）$\frac{\psi_n}{n}$ ノ数学的期望値ハ $\Pi_{ii}^{(n)}$ ニ等シイコトハ容易ニ分ル．$n \geqq n_0$ ナラバ $\frac{\psi_n}{n}$ ハ $1-2\varepsilon$ ヨリ大キナ確率ヲモツテ $\frac{k'}{n}$ ト $\frac{k''}{n}$ ノ間ニアルカラ

$$\frac{k'}{n} = \frac{1}{M_{ii}}(1-\varepsilon) < \frac{\psi_n}{n} < \frac{1}{M_{ii}}(1+\varepsilon) = \frac{k''}{n},$$

ソシテ常ニ $0 \leqq \frac{\psi_n}{n} \leqq 1$，$M_{ii} \geqq 1$ デアルカラ，$n \geqq n_0$ デアレバ

$$\left| \Pi_{ii}^{(n)} - \frac{1}{M_{ii}} \right| \leqq E \left| \frac{\psi_n}{n} - \frac{1}{M_{ii}} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{M_{ii}} + 2\varepsilon,$$

コレカラ

$$\lim_{n\to+\infty}\Pi_{ii}^{(n)}=\frac{1}{M_{ii}}$$

次ニ$M_{ii}=+\infty$ノ場合ヲ考ヘル．コノ時ハ$M<+\infty$, $\varepsilon>0$ガ何デアラウト，k_0ガ存在シテ，$k\geqq k_0$ナラバ

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j=\frac{n_k}{k}\leqq M$$

トナル確率ハεヨリ小サクナル．コノ事情ヲ証明スルニハ，新ラシイ互ニ独立ナ variable aléatoire x'_kデ，對應スルx_kヨリモ小サナ（スベテノkニツキ$x'_k\leqq x_k$），數學的期望値ハ，例ヘバ$2M$ニ等シイモノヲ導入シ，コレニ前述ノ大数ノ法則ヲ適用スレバ十分デアル。

$k=\left[\frac{n}{M}\right]+1>\frac{n}{M}$トスレバ，$n\geqq k_0M$ナラバ$k\geqq k_0$トナリ，$1-\varepsilon$ヨリ大キナ確率ヲモッテ次ノ不等式ガ成立スルヲ見ル。

$$\frac{n_k}{k}>M,\quad n_k>kM\geqq n,\quad \psi_n\leqq k\leqq\frac{n}{M}+1,$$

$$\frac{\psi_n}{n}\leqq\frac{1}{M}+\frac{1}{n}$$

從ッテ，$n\geqq k_0M$ナラバ

$$\Pi_{ii}^{(n)}=E\left(\frac{\psi_n}{n}\right)\leqq\frac{1}{M}+\frac{1}{n}+\varepsilon,$$

コレカラ今ノ場合ニハ

$$\lim_{n\to+\infty}\Pi_{ii}^{(n)}=0$$

ヲ結論スルコトが出来ル。

$\boxed{\text{定理 II}}$ 同一ノくらすノ範囲内ニ於テハ，M_{ii} がスベテ無限大デアルカ，M_{ij} がスベテ有限デアルカ，何レカデアル。

証明：　同一ノくらすニ属スル任意ノ二ツノ状態 E_i，E_j ニツキ $P_{ij}^{(K)}>0$，$P_{ij}^{(m)}>0$ トナル K 及ビ m ハ存在スル。更ニ任意ノ n ニ対シテ明ニ

$$P_{jj}^{(n+K+m)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(n)} P_{ij}^{(K)}$$

コノ不等式カラ容易ニ次ノ式が出ル。

$$\lim_{n\to\infty} \overline{H}_{jj}^{(n)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(K)} \lim_{n\to\infty} \Pi_{ii}^{(n)}$$

従ッテ $\Pi_{ii}^{(n)}$ ノ極限ハ（與ヘラレタくらす内ノ）総テノ i ニツキ，0デアルカ >0 デアル．故ニ Lemma II ニヨリ M_{ii} ハスベテ有限カ無限大デアル。

M_{ii} が有限ナラ M_{ij} がスベテ有限デアルコトノ証明が残ル．ソノタメニ $R_{ij}^{(n)}$ ヲ E_i カラ出テ，n step 後ニ，途中デ E_i ヘ入ルコトナク，E_j（$j \neq i$）ヘ行ク確率トスル。シカルトキハ

$$M_{ii} = \sum_{m=1}^{n} m K_{ii}^{(m)} + \sum_{j\neq i} R_{ij}^{(n)} (M_{ji}+n)^{*}$$

シカルニ同一ノくらす内デ任意ノ i, j ニ対シ $P_{ij}^{(n)}>0$ トナル n ヲ見出スコトがデキル。

※　脚註ハ次頁ヘ

コノ様ニシテ$M_{ji}=+\infty$ナラバ$M_{ii}=+\infty$トナル。コレデ証明ハ無事ニ終ル。スベテノM_{ij}ガ有限ナくらすヲ<u>正くらす</u>，スベテノ$M_{ii}=+\infty$トナルくらすヲ<u>ぬるくらす</u><u>（null class）</u>ト呼ブ。null classデハアルM_{ij}（$i\neq j$）ハ有限ニナリ得ルコトハ指摘シテオクベキデアラウ。

<u>定理III</u>　<u>ぬるくらすニ於テハ，状態E_i及ビE_jノ如何ニ関セズ，確率$P_{ij}^{(n)}$ハ$n\to+\infty$ニ際シ零ニ収斂スル。</u>

定理IIIノ証明ニハ次ノlemmaガ必要デアル。

<u>Lemma II b</u>　<u>ぬるくらすニ於テハ，任意ノE_jニニ対シ</u>

$$\Pi_{jj}^{(n,m)}=\frac{1}{m}\left(P_{jj}^{(n+1)}+P_{jj}^{(n+2)}+\cdots\cdots+P_{jj}^{(n+m)}\right)$$

<u>ハ$m\to+\infty$ノトキ，nニ関シテハ一様ニ零ニ収斂スル。</u>

（前頁註）

※実際$r>n$ナラ　$K_{ii}^{(r)}=\sum_{j\neq i}R_{ij}^{(n)}K_{ji}^{(r-n)}$

$$故ニ\quad M_{ii}=\sum_{m=1}^{\infty}mK_{ii}^{(m)}=\sum_{m=1}^{n}mK_{ii}^{(m)}+\sum_{r>n}r\sum_{j\neq i}R_{ij}^{(n)}K_{ji}^{(r-n)}$$

$$=\sum_{1}^{n}mK_{ii}^{(m)}+\sum_{j\neq i}R_{ij}^{(n)}\sum_{S=1}^{\infty}(n+S)K_{ij}^{(S)}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}mK_{ii}^{(m)}+\sum_{j\neq i}R_{ij}^{(n)}(M_{ji}+n)$$

証明： 最初ノ状態ヲ E_j トシ，（最初ノ n step 中ニ E_j ニ戻ルカ否カニハ無関係ニ），$(n+1)^{th}$ step 以後デ $(n+s)^{th}$ step デハジメテ状態 E_j ガ現ハレル確率ヲ $H^{(s)}$ トスル．コノ時

$$P_{jj}^{(n+k)} = \sum_{s=1}^{k} H^{(s)} P_{jj}^{(k-s)},$$

$$\Pi_{jj}^{(n,m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} P_{jj}^{(n+k)} = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} H^{(s)} \sum_{k=0}^{m-s} P_{jj}^{(k)}$$

$$= \sum_{s=1}^{m} H^{(s)} \frac{(m-s)}{m} \Pi_{jj}^{(m-s)} + \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} H^{(s)} \quad \cdots\cdots(12)$$

$r \geqq r_0$ ナラバ常ニ $\Pi_{jj}^{(r)} < \varepsilon$ トナル r_0 ヲトリ（ソレハ lemma IIa ニヨリ常ニ可能デアル）； $m_0 > \frac{r_0}{\varepsilon}$ ト選ブ、更ニ $m \geqq m_0$ トスルト，$m-s \leqq r_0$ ナラ $\frac{m-s}{m} < \varepsilon$ トナリ $m-s \geqq r_0$ ナラバ $\Pi_{jj}^{(m-s)} < \varepsilon$ トナル．

常ニ $\frac{m-s}{m} \leqq 1$, $\Pi_{jj}^{(m-s)} \leqq 1$ デアルカラ，スベテノ $m \geqq m_0$ ニ對シテ

$$\frac{m-s}{m} \Pi_{jj}^{(m-s)} < \varepsilon .$$

$$\sum_{s=1}^{m} H^{(s)} \leqq 1$$

ヲ考慮スレバ (12) カラ $m \geqq m_0$ デサヘアレバ $\Pi_{jj}^{(n,m)} < \varepsilon + \frac{1}{m}$ ヲ得ル．ε ハ任意デ n ニ無関係デアルカラ，コレデ lemma ハ証明サレタ。

定理 III ノ証明． 先ヅ定理ノ証明ニハ，$i = j$ ノ時ニ

証明スレバ即チ $P_{jj}^{(n)}\to 0$ ($n\to+\infty$ ヲ言ヘバ充分デアル

コトヲ注意シヨウ。実際ニ，$P_{ji}^{(m)}>0$ トナル m ヲ選ベバ

明カニ

$$P_{jj}^{(n+m)}\geq P_{ji}^{(m)}P_{ij}^{(n)}.$$

m ヲ固定シテ $n\to+\infty$ トスレバ，$P_{jj}^{(n+m)}\to 0$ カラ $P_{ij}^{(n)}\to 0$

ガ出ル。

今 $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, P_{jj}^{(n)}=\lambda>0$$

ト假定シヨウ。コノ仮定カラ矛盾ヲ生ズレバ定理 III ハ証明

サレタワケデアル。

$$K_{jj}^{(a)}=A>0$$

トナル整数 a ヲ選ブ。任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シ n_0 ガ存在シテ

$n\geq n_0$ ナラバ

$$P_{jj}^{(n)}\leq\lambda+\varepsilon$$

ガ成立スル。更ニ，アル $\delta>0$ ニ対シ

$$\sum_{m>m_0}K_{jj}^{(m)}<\delta$$

トナルヤウ ニ $m_0\geq a$ ヲ選ブ．然ルトキハ假定ニヨリ

$$n\geq n_0+m_0,\quad P_{jj}^{(n)}\geq\lambda-\eta\qquad(\eta>0)$$

デアレバ

$$P_{jj}^{(n-a)}\geq\lambda-\frac{\eta+\varepsilon+\delta}{A}$$

ガ成立スル。實際

$$\lambda-\eta \leq P_{jj}^{(n)}=K_{jj}^{(n)}P_{jj}^{(0)}+K_{jj}^{(n-1)}P_{jj}^{(1)}+\cdots\cdots+K_{jj}^{(1)}P_{jj}^{(n-1)}$$

$$=K_{jj}^{(a)}P_{jj}^{(n-a)}+\sum_{a\neq m<m_0}K_{jj}^{(m)}P_{jj}^{(n-m)}+\sum_{m_0<m\leq n}K_{jj}^{(m)}P_{jj}^{(n-m)}$$

$$\leq AP_{jj}^{(n-a)}+(1-A)(\lambda+\varepsilon)+\delta.$$

$$P_{jj}^{(n)} \geq \lambda-\eta$$

ナラバ $n \geq n_0+m_0+sa$ デアレバ

$$P_{jj}^{(n-a)} \geq \lambda-\frac{\eta+\varepsilon+\delta}{A}=\lambda-\eta_1,$$

$$P_{jj}^{(n-2a)} \geq \lambda-\frac{\eta_1+\varepsilon+\delta}{A}=\lambda-\eta_2,$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$P_{jj}^{(n-sa)} \geq \lambda-\frac{\eta_{s-1}+\varepsilon+\delta}{A}=\lambda-\eta_s$$

ガ出ル. 茲ニ

$$\eta<\eta_1<\eta_2<\cdots\cdots<\eta_s.$$

シカルニ任意ノ s ニ対シ $\eta_s<\frac{\lambda}{2}$ トナル様ニ $\eta>0$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$ ヲ選ビ出スコトガ出来ル. ソレニ対応スル n_0 ト m_0 トヲトレバ, スベテノ $n \geq n_0+m_0+sa$ 及ビ $P_{jj}^{(n)}>\lambda-\eta$ ニ対シテ次ノ不等式ヲ得ル。

$$P_{jj}^{(n)}>\frac{\lambda}{2},\ P_{jj}^{(n-a)}>\frac{1}{2}\cdots\cdots P_{jj}^{(n-sa)}>\frac{\lambda}{2},$$

$$\Pi_{jj}^{(n-sa,\,sa)}>\frac{1}{sa}\cdot s\cdot\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2a}.$$

$\frac{\lambda}{2a}$ ハ常数, s ハ如何程デモ大キク出来, n ハ固定シタ s ニ対シテハ如何ホドデモ大キナ値ヲトルコトガ出来ル, コレハ

Lemma II b ニ矛盾スル。

§5. 正くらすノ内部ニ於ル漸近的関係

定理IIIヲ証明スルコトニ依リ、第一近似トシテノぬ且くらすノ研究ハ完了スル．正くらすニ関シテハ次ノ一般定理ガ茲ニ成立スル。

$\boxed{\text{定理 IV a}}$ 正くらす $S^{(\alpha)}$ ニ於テ，部分くらす $S_{\beta}^{(\alpha)}$ カラ E_i ヲ，$S_{\gamma}^{(\alpha)}$ カラ E_j ヲ任意ニトルトキ，n ガ $n \equiv \beta - \gamma \pmod{d(\alpha)}$ ナル値ヲトッテ無限大ニ赴ケバ，確率 $P_{ij}^{(n)}$ ハ i ニハ無関係ナ極限

$$P_j = \frac{d(\alpha)}{M_{jj}}$$

ニ収斂スル。

注意：　$n \not\equiv \beta-\gamma \pmod{d(\alpha)}$ ノトキハスデニ示シタ様ニ（P.　）$P_{ij}^{(n)}=0$ デアル．定理IVノ証明ニハ一群ノ *lemma* ガ必要デアル。

$\boxed{\textit{Lemma}\ \text{III}}$ *positive class* デハ任意ノ i, j 及ビ $\varepsilon > 0$ ニ対シ，ドノ n ニ對シテモ E_i カラ出テ n^{th} ト $(n+m)^{th}$ *step* ノ間ニ少クトモ一回 E_j ヲ訪レル確率ガ $1-\varepsilon$ ヨリ大キクナル様ナ m ガ存在スル。

証明：　E_i ヲ出テ上述ノ期間中ニ E_j ヲ訪レヌ確率ハ

$$P = \sum_{p=n+m}^{\infty} K_{ij}^{(p)} + \sum_{k=1}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \sum_{p=n+m-k}^{\infty} K_{jj}^{(p)}$$

$$=\sum_{n+m}^{\infty} K_{ij}^{(p)}+\sum_{p=m+1}^{n+m-1} K_{jj}^{(p)} \sum_{k=n+m-p} P_{ij}^{(k)}+\sum_{p=n+m}^{\infty} K_{jj}^{(p)} \sum_{k=1}^{n-1} P_{ij}^{(k)}$$

$$\leq \sum_{p=m}^{\infty} K_{ij}^{(p)}+\sum_{p=m+1}^{\infty} p K_{jj}^{(p)}=U^{(m)}$$

シカルニモシ

$$M_{jj}=\sum_{p=1}^{\infty} p K_{ij}^{(p)}$$

ガ有限ナラバ，$U^{(m)}$ ハ $m \to +\infty$ ノトキ 0 ニ収斂スル．$U^{(m)}$ ハ n ニ無関係デアルカラ、*lemma* ヲ証明サレタ。

$\boxed{\textit{Lemma IVa}}$ <u>一ツノ *sub class* カラナル *positive class* デハ</u>

$$\varliminf_{n \to +\infty} P_{ij}^{(n)} > 0$$

証： *class* ガ一ツノ *sub class* カラナルトキハ，$k \geq k_0$ ナラバ常ニ $P_{jj}^{(k)} > 0$ トナル k_0 ガ存在スル．*lemma* III ニ於ケル ε ヲ $\frac{1}{2}$ トシテ i, j ニ対シテ *lemma* III ガ成立スル m ヲ選ブ。

$$\lambda=\inf\left\{P_{jj}^{(k_0)}, P_{jj}^{(k_0+1)}, \text{-----}, P_{jj}^{(k_0+m)}\right\}$$

トオク。明ラカニ $\lambda > 0$． サテ $n' > m + k_0$ トシ，$n' = n + m + k$ トオク。状態 E_i ヲ出テ n^{th}, $n+m^{th}$ *step* 間ニ状態 E_j ヲ訪レル確率ハ $\frac{1}{2}$ ヨリ大キイ。

n^{th} カラ $(n+m)^{th}$ *step* 間ニ最初ノ訪問ハ $(n+s)^{th}$ *step* ニ起ッタトセヨ（$s < m$），コノ仮定ノ下デ $n' = n + m + k_0$

step ノ後ニ E_j ヘカヘル条件確率ハ $P_{jj}^{(k_0+m-s)} \geq \lambda$ デアル。コノ不等式ハ任意ノ s ($1 \leq s < m$) デ成立ツ。故ニ E_j ヲ出テ $n' = n + m + k_0$ step 後ニ E_j ヘ行ク全確率 $P_{ij}^{(n')}$ ハ次ノ不等式ヲミタス。

$$P_{ij}^{(n')} > \frac{1}{2}\lambda$$

コレハ任意ノ n デ正シイナラ lemma ノ証明ハ終ル。

$\boxed{\text{Lemma IV } b}$ 一ツノ sub class カラナル positive class デハ

$$\lim_{n\to+\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{M_{ii}}$$

証 先ヅ $n \to +\infty$ ノトキノ極限ノ存在カラ始メル．次ノ様ニ書ク．

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = a,$$

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} P_{ii}^{(n)} = b.$$

Lemma IV a ニヨリ $b \geq a > 0$. $\varepsilon > 0$ トセヨ。$j = i$ ニ対シ lemma III ヲ満足スル m ヲ選ブ．更ニ $k \geq k_0$ ナラ次ノ不等式ガ成立スル様ニ k_0 ヲ選ブ。

$$a - \varepsilon < P_{ii}^{(k)} < b + \varepsilon$$

$n > m + k_0$ ヲ $P_{ii}^{(n)} < a + \varepsilon$, $n' > n + k_0$ ヲ $P_{ii}^{(n')} > b - \varepsilon$ トナルモノトスル（コノ様ナ n, n' ハ常ニ見出セル）$n' - n = k$ トオケバ

$$P_{ii}^{(n')} = P_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n)} + A^{(1)} P_{ii}^{(n-1)} + A^{(2)} P_{ii}^{(n-2)}$$

$$+\cdots\cdots+A^{(n)}P_{ii}^{(0)}$$

コヽデ $A^{(S)}$ ハ，最初ハ E_i ニアル條件デ，k^{th} step 以後デハ $(k+s)^{th}$ step デハジメテ E_i ヘカヘル確率デアル。

明ラカニ

$$P_{ii}^{(k)}+\sum_{s=1}^{n}A^{(S)}\leq 1$$

ノミナラズ lemma III ニヨリ

$$P_{ii}^{(k)}+\sum_{S=1}^{m}A^{(S)}>1-\varepsilon$$

コノ二ツノ不等式カラ，次ノコトガワカル。

$$\sum_{S=m+1}^{n}A^{(S)}<\varepsilon$$

尚ホ，$S\leqq m$ ナラ不等式 $n-S>k$ ガ，従ッテ $P_{ii}^{(n-S)}<b+\varepsilon$ ガ成立スルコトヲ注意スル，コノ故ニ

$$\begin{aligned}P_{ii}^{(n')}&=P_{ii}^{(k)}P_{ii}^{(n)}+\sum_{s=1}^{m}A^{(s)}P_{ii}^{(n-S)}+\sum_{S=m+1}^{n}A^{(S)}P_{ii}^{(n-S)}\\&\leqq P_{ii}^{(k)}(a+\varepsilon)+(1-P_{ii}^{(k)})(b+\varepsilon)+\varepsilon\\&=b+2\varepsilon-P_{ii}^{(k)}(b-a).\end{aligned}$$

コヽデ $P_{ii}^{(k)}>a-\varepsilon$, $P_{ii}^{(n')}>b-\varepsilon$, 及ビ $b-a\leqq 1$ ヲ顧慮スレバ

$$b-\varepsilon\leqq b+2\varepsilon-(a-\varepsilon)(b-a)\leqq b+3\varepsilon-a(b-a),$$

$$a(b-a)\leqq 4\varepsilon,$$

$$b-a\leqq\frac{4\varepsilon}{a}$$

ヲ得ル。$a>0$, $\varepsilon>0$ ハ任意デアルカラ $b-a=0$, コレハ $P_{ii}^{(n)}$ ノ極限ガ存在シテ $b=a$ ニ等シイコトヲ示ス。Lemma II a カラ間接ニコノ極限ハ $\frac{1}{M_{ii}}$ ニ等シイコトガワカル。

$\boxed{\text{定理 IV a ノ証明}}$ 與ヘラレタ Markoff 連鎖ノホカニ、えれめんたりー遷移確率

$$\bar{P}_{ij}=P_{ij}^{(d)}$$

デ定義サレル新ラシイ Markoff 連鎖ヲ考ヘヨウ. コヽニ d ハ考ヘテヰルくらすノ周期デアル。明ラカニ吾々ノくらすノ状態ニツイテハ

$$\bar{P}_{ij}^{(n)}=P_{ij}^{(nd)}$$

デアル。新シイ Maroff 連鎖ニアツテハ状態ノくらすハ唯一ツノ部分くらすヨリナル。故ニ lemma IV b ニヨリ

$$\lim_{n\to+\infty} P_{ii}^{(nd)}=\lim_{n\to+\infty}\bar{P}_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\bar{M}_{ii}}=\frac{d}{M_{ii}}$$

カクシテ定理 IV a ハ $i=j$ ナル場合ニ証明サレタ. 一般ノ場合ヲ証明スルタメニ。

E_i カラ E_j ヘ遷移スルニ要スル最小ノ step 数ヲ q トスルト（明ニ $q\equiv\gamma-\beta \pmod d$）,

$$P_{ij}^{(nd+q)}=\sum_{m=0}^{n} K_{ij}^{(md+q)} P_{jj}^{(nd-md)}$$

トナル。シカルニ

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{ij}^{(md+q)} = 1$$

デアリ，$P_{jj}^{(nd-md)}$ ハmヲ固定シテ$n\to+\infty$トスレバ$\dfrac{d}{M_{jj}}$ニ収斂スル。コノ事カラ

$$\lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(nd+q)} = \frac{d}{M_{jj}}$$

定理Ⅳaノ本質的ナ補足ハ

$\boxed{\text{定理Ⅳ}b}$ positive class デハ各々ノ sub class ニ於ケルスベテノ状態ニ対スル極限P_jノ和ハ$\frac{1}{d}$ニ等シイ。

定理Ⅳbハ次ノ lemma カラ容易ニ出ル。

$\boxed{\text{Lemma}\ \mathrm{V}}$ positive class ニ於テハ，任意ノ$\varepsilon>0$ニ対シ，有限個ノ状態ノ system $E_{j_1}, E_{j_2}, \cdots\cdots, E_{j_k}$ ガアッテ，コノ class ノ任意ノE_iト充分大キナスベテノnニ対シテ

$$\sum_{s=1}^{k} P_{ij_s}^{(n)} > 1-\varepsilon$$

証明：i_0ヲ任意ニ選ブ。Lemma Ⅲニヨッテ，任意ノnニ對シ，E_{i_0}ヲ出ヲ出テn^{th}カラ$(n+m)^{th}$ step ノ間ニ少クトモ一度E_{i_0}ヲ訪レル確率ガ$1-\frac{\varepsilon}{3}$ヨリ大キクナル様ナmガ存在スル。

任意ノ$r\leq m$ニ対シ

$$\sum_{s=1}^{k} P_{i_0 j_s}^{(r)} > 1-\frac{\varepsilon}{3}$$

トナル様ナ system $E_{j_1}, E_{j_2}, \cdots E_{j_k}$ ヲ選ブコトハ常ニ可能デアル。コノ様ニ選ンダ system ガ lemma ノ條件ヲミタスコトヲ證明シヨウ。ソノタメニドレカ一ツ i ヲ固定シテ q ヲ

$$\sum_{t=1}^{q} K_{i i_0}^{(t)} > 1-\frac{\varepsilon}{3}$$

トナル様ニ選ブ。$n > m+q$ トシ $n = q'+m$, $q' > q$ トオク.

$1-\frac{\varepsilon}{3}$ ヨリ大キナ確率ヲ以テ最初ノ q' steps デ E_i カラ E_{i_0} ヘ行リ. $\leq q'$ ナル step デハ最初ニ E_{i_0} ヘハ戻ラズ, $1-\frac{\varepsilon}{3}$ ヨリ大ナル確率デ q'^{th} カラ $(q'+m)^{th}$ step ノ間デ E_{i_0} ヘ戻ル。モシコレガ $(q'+m-r)^{th}$ step ノドレカデ起レバ、$1-\frac{\varepsilon}{3}$ ヨリ大キナ確率ヲ以テ $q'+m$ step 後ニハ選バレタ状態ノ一ツ E_{j_s} ニアル。カクシテ $(1-\frac{\varepsilon}{3})^3 > 1-\varepsilon$ ヨリ大ナル確率デ, E_i ヲ出テ $n = q'+m$ step 後ニハ選バレタ状態ノ一ツ E_{j_s} ニ行ク. コレデ lemma ガ證明サレ、同時ニ定 IV b モ證明サレタ。

注意: 定理 IV a カラ, $\Pi_{ii}^{(n)}$ ガ $\frac{1}{M_{ii}}$ ニ收斂スル (lem. II a) バカリデナク E_i ト同一ノくらすニ属スル E_j ニ対シテハ $\Pi_{ji}^{(n)}$ モ同一ノ極限ニ收斂スルコトガワカル。定理 IV b ニヨリ一ツノ部分くらすノ状態ノスベテニ関スル和 $\sum\frac{1}{M_{ii}}$ ハ $\frac{1}{d}$ (d ハくらすノ周期) ニ等シク, 全くらすノ状態ニ関スル和ハ 1 ニ等シイ。

§6. 其他ノ場合ニ於ケル確率ノ漸近的行動

§2デ考察シタコトニヨリ、スベテノ n ニ就キ $P_{ij}^{(n)}=0$ トナル状態ノ組 E_i, E_j ハ措キ，E_j ガ非本質的デアレバ $n\to+\infty$ ノ際ニ，常ニ $P_{ij}^{(n)}$ ハ零ニ收斂スルコトヲ注意スル。更ニ，ヨリ複雜ナ場合：E_i ハ非本質的，E_j ハ本質的デアルくらす $S^{(\alpha)}$ ニ屬スル場合ヲ考ヘヨウ。非本質的狀態 E_i ニ対シ，E_i ヲ出テ遂ニハ $S^{(\alpha)}$ ノアル狀態ニ達スル確率ヲ $N_i^{(\alpha)}$ トシヨウ。明ラカニ，くらす $S^{(\alpha)}$ ノ一ツノ狀態ニ達スレバ ソノくらすノ場外ニ出ルコトハ不可能デアルカラ

$$\sum N_i^{(\alpha)}\leq 1$$

デアル。最初ノ狀態 E_i カラ，くらす $S^{(\alpha)}$ ニ入ル場合ニハ $S^{(\alpha)}$ ノ最初ノ狀態 E_j ヘ達スルニ要スル step 数ヲ n_0。コノ最初ノ狀態 E_j ノ屬スル部分くらす $S_{\beta_0}^{(\alpha)}$ ノ番号ヲ β_0 トスル。$N_{i,\gamma}^{(\alpha)}$ ヲ最初ノ狀態 E_i カラ $n_0\equiv\beta_0+\gamma \pmod{d(\alpha)}$ デ $S^{(\alpha)}$ 内ニ入ル確率トシヨウ。明ラカニ

$$\sum_{\gamma=1}^{d(\alpha)} N_{i,\gamma}^{(\alpha)}=N_i^{(\alpha)}$$

次ノ定理ガ成立スルノヲ示スコトガ出來ル。

$\boxed{\text{定理V}}$ <u>非本質的 E_i ト部分くらす $S_\gamma^{(\alpha)}$ ニ屬スル本質的 E_j ニ対シ，n ガ $n\equiv\beta \pmod{d(\alpha)}$ ナル値デ $n\to+\infty$ トナル時，確率 $P_{ij}^{(n)}$ ハ $N_{i,\beta-\gamma}^{(\alpha)}P_j$ ニ收斂スル。</u>

コノ樣ニ固定シタ i, j ニ対シ $P_{ij}^{(n)}$ ノ n ニ対スル関係ハ（本質，非本質ノ）スベテノ場合ヲ通ジ漸近一周期的

(asymptotic-periodic) デアルコトヲ見ル。平均$\Pi_{ij}^{(n)}$ ソノモノハ $n \to +\infty$ ノトキ常ニ一定ノ極限 Π_{ij} ヲ持ツテヰル。