# 834. Wesentlich n ノ Abbildung, 其ノ他

小松　醇郎（阪大）

次ノ一聯ノ定理ヲ証明スル。

定理1. Komplex $K^n$ ノ Homotopiegruppe $\pi^m(K^n)$ ニテ wesentlich n ノ Abbildung ガ作ル Abbildungsgruppe $\mathfrak{U}^m(K^n)$ ハ $\pi^m(S^n)$ ノ $\bar{\alpha}_n$ 個ノ直和ノ部分群ニ isomorph デアル. 特ニ $m=n$ ナラバ $\mathfrak{U}^n(K^n)$ ハ Modul デアル。

定理2. Komplex $K_1^n$ カラ Komplex $K_2^n$ ニ wesentlich n ノ Abbildung $f$ ガ存在シ $K_2^n$ ガ単純連結ナラバ $K_i^n$ ニ Zyklus $Z_i^n$ ガ存在シ $f(Z_1^n)=Z_2^n$ デアル。

定理3. Komplex $K_1^n$ カラ Komplex $K_2^n$ ニ wesentlich n ノ Abbildung $f$ ガ存在シ $K_1^n$ ガ単純連結ナラバ $K_i^n$ ニ Zyklus $Z_i^n$ ガ存在シ $f(Z_1^n)=Z^n$ デアル。

定理4. Sphäre $S^n$ ノ wesentlich $n$ ナ Bildkomplex $K^n$ ハ Zyklus $Z^n$ ヲ含ム。

定理5. Komplex $K^n$ ガ wesentlich $n$ in sich デアルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ或ル Überdeckung $\mathfrak{U}$ ニ関シ $\neq 0$ ナ Zyklus $Z^n$ ガ存在スルコトデアル。

定理6. Sphäre $S^n$ カラ Grad 1 デ移ル Mannigfaltigkeit $M^n$ ハ Sphäre カ又ハ Sphäre ト Homotopietypus ヲ等シクスルモノデアル。

定理4カラ, wesentlich $n$ in sich ノ Komplex $K^n$ デ Zyklus $Z^n$ ガ存在シナイナラバ Sphäre カラノ wesentlich $n$ ノ Bild トハナリ得ナイ. シカシソノ Komplex ハ或ル überdeckung ニ関シテ Zyklus $Z^n$ ヲ持ツ. ソレ故 $K^n$ ガ単純連結デ wesentlich $n$ in sich ナラバ普通ノ Zyklus $Z^n$ ガ存在スル。

wesentlich $n$ in sich ノ性質ハ Homologie ダケデハ charakterisiren 出来ナイ. $n$-Zyklus ガ存在シナクテ wesentlich $n$ ナ Komplex ノ例ハイクラデモ出来ル. 例ヘバ本誌,第190号. 談話824.

例 I.

$S^n$ カラ Grad 1 デ移ル Mannigfaltigkeit $M^n$ ノ性質ハ分ッタガ Grad $c$ ( $c>1$ ) デ移ルモノハ如何。ソノヤウナ $M^n$ ノ Fundamentalgruppe ハ

有限群デアルガ位数 C ニナルノデハナカロウカト思フ。

<u>定理 I ノ証明</u>:

$K^n$ ノ universelle Überlagerungskomplex $\widetilde{K}^n$ ヲトレバ

$$\pi^m(K^n) \approx \pi^m(\widetilde{K}^n)$$

$$u^m(K^n) \approx u^m(\widetilde{K}^n)$$

$\widetilde{K}^n$ ヲ Zellenzerlegung シテ $\bar{\alpha}_n$ 個ノ Zelle ニナツタトスル。

$$C_1^n, \cdots\cdots, C^n_{\bar{\alpha}_n}$$

$C_i^n$ ノ内部ハ $n$-単体ノ内部ニ homeomorph.
$u^m(\widetilde{K}^n)$ ノ一ツノ元ヲ與ヘル Abbildung ヲ $f$.

$$f(S^m) \subset \widetilde{K}^n$$

$C_i^n$ ノ内部ノ一点 $p_i$, $f$ ニヨル $p_i$ ノ原像 $f^{-1}(p_i)$ ハ $\widetilde{K}^n$ 単純連結デアルカラ zusammenhängend ニ出来ル. 今 $\widetilde{K}^n - I_{nn}$. $C_i^n$ ヲ一点ニ Identifizieren スレバ一ツノ Sphäre. 即チ $f$ ハ $S^m \longrightarrow S^n$ ノ Abbildung デアル. 故ニ $\pi^m(S^n)$ ノ或ル元 $\beta_i$ ヲ定メル。

凡テノ Zelle $C_i^n$ ニツキ行ヘバ結局

$$f \longrightarrow (\beta_1, \cdots\cdots, \beta_{\bar{\alpha}_n}), \quad \beta_i \in \pi^m(S^n)$$

ナル對應ガ定マル。

此ノ對應ハ eindeutig デアル, 何トナレバ
$u^m(\widetilde{K}^n)$ ノ 0 元ヲ與ヘル $f$ デ

$$f \longrightarrow ( \qquad , \beta_i, \cdots\cdots ), \quad \beta_i \neq 0$$

ナルコトハアリ得ナイ。アツメトスレバ: $f$ ト等シイ Klasse ノ Abbildung $f'$ デ wesentlich $n$ デハナイモノ存在スルカラ、次ノ Abbildung 存在スル。

$$F(S^m \times t) \subset \widetilde{K}^n$$

$$F(S^m \times 0) = f(S^m) \subset \widetilde{K}^n$$

$$F(S^m \times 1) = f'(S^m) \subset \widetilde{K}^{n-1}$$

$F$ ニヨル $p_i$ ノ原像 zusammenhängend ニシテオイテ $\widetilde{K}^n - \mathrm{Inn.}\, C_i^n$ ヲ一点ニ Identifizieren スレバ

$$F(S^m \times t) \subset S^n$$

$$F(S^m \times 0) = f(S^m) \subset S^n$$

$$F(S^m \times 1) = f'(S^m) = \mathrm{Konst.}$$

従ッテ $f(S^m)$ ハ $C_i^n$ ニテ $\pi^m(S^n)$ ノ 0 元デナクテハナラナイ。即チ $f = 0 \in \mathfrak{u}^m(\widetilde{K}^n)$ ナラバ

$$f \longrightarrow (0, 0, \cdots\cdots, 0)$$

以上ニヨツテ

$$\mathfrak{u}^m(\widetilde{K}^n) \longrightarrow (\overbrace{\pi^m(S^n), \cdots\cdots, \pi^m(S^n)}^{\bar{\alpha}_n \text{個}})$$

ナル對應ハ isomorph.

$m = n$ ナラバ $\pi^n(S^n)$ ハ整数群ダカラ $\mathfrak{u}^n(\widetilde{K}^n)$ ハ Modul ニナル筈。

<u>定理2ノ証明:</u>

$K_2^n$ 單純連結デアルカラ之レヲ Zellenzerlegung シ

テ$\alpha_n$個ノ Zelle ニナツタトスル。

$$C_1^n, \cdots\cdots, C_{\alpha_n}^n$$

然ラバ $\mathfrak{U}^n(K^n)$ ハ $\alpha_n$個ノ Basis ヲ持ツ modul $\mathfrak{G}(\alpha_n)$ ノ部分群ニ isomorph デアル。此ノ Isomorphismus $k$,
即チ $k(\mathfrak{u}^n(K^n)) \subset \mathfrak{G}(\alpha_n)$.

$K^{n-1}$ ノ $(n-1)$-Homotopiegruppe $\pi^{n-1}(K^{n-1})$ ノ元ノ内チ $K^n$ デハ homotop 0 ニナルモノハ部分群 $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ ヲナス。$\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ ハ $\mathfrak{G}(\alpha_n)-k(\mathfrak{u}^n(K^n))$ ニ isomorph auf ニ abbilden サレル。

i) $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ ハ $\mathfrak{G}(\alpha_n)$ mod. $k(\mathfrak{u}^n(K^n))$ ニ homomorph ニ對應スル。

證明ハ Mannigfaltigkeit ノ場合ト同樣. 本誌第191号. 談話828. p.623.

ii) homomorph auf デアル。

iii) isomorph デアル。

$K^n$, 從ツテ $K^{n-1}$ $(n \geqq 3)$ ハ單純連結デアル。從ツテ $K^{n-1}$ ハ $(n-1)$-simple デアル。然ラバ Mannigfaltigkeit ニ於ケル同樣ナ定理ト殆ンド方針ハ變ラナイ。本誌第189号. 談話818. p.530。

然ラバ $K_1^n$ ニ於ケル $n$-Betti 群ノ係數群トシテ $(\lambda^{n-1}(K^{n-1}), \mathfrak{G}(\alpha_n))$ ナルアーベル群ヲトル。此ノ場合ニ $\neq 0$ ナ Zyklus $Z_1^n$ ノ存在ノ場合ノ證明ハ Mannigfaltigkeit ノ場合ト同樣. 本誌第191号.

談話 828, P. 626。

$K_1^n = Z_1^n$ ガ存在シ，証明方法カラ分ル様ニ Abbildung $f$ デ $Z_1^n$ ガ wesentlich $n$ ニ移ルノダカラ又 $K_2^n$ ニ $\neq 0$ ナ Zyklus $Z_2^n$ ガ存在シ

$$f(Z_1^n) = Z_2^n$$

<u>定理 3 ノ証明</u>

$$f: K_1^n \longrightarrow K_2^n \quad \text{wesentlich } n.$$

$K_2^n$ ノ universelle Überlagerungsraum $\tilde{K}_2^n$ トスレバ Abbildung $g(\tilde{K}_2^n) = K_2^n$.

$K_1^n$ 単純連結デアルカラ

$$\tilde{f}(K_1^n) \subset \tilde{K}_2^n$$

デアッテ，且ツ $\quad g\tilde{f} = f$

ナル如キ Abbildung $\tilde{f}$ ガ作レル。(証略)

$\tilde{f}$ ハ又 wesentlich $n$.

定理 2. ヨリ $\tilde{K}_2^n$ ニ Zyklus $\tilde{Z}_2^n$ ガ存在ス．之ハ $g$ ニヨッテ wesentlich $n$ デアルカラ

$$g(\tilde{Z}_2^n) = Z_2^n \subset K_2^n$$

<u>定理 4 ノ証明.</u>

$$f: S^m \longrightarrow K^n. \quad \text{wesentlich } n.$$

$K^n$ ノ一点 $p$ ノ原像 $f^{-1}(p)$ ヲ zusammenhängend ノ部分ニ分ツ．即チ

$$f^{-1}(p) = A_1 + \cdots\cdots + A_\beta.$$

$S^m$ デコノ $A_i$ ヲ一点ニ Identifizieren スル.

$K^n$ ノ凡テノ点ノ原像ニツキ之レヲ行ヘバ結局一ツノ

$n$-Komplex $K^n_1$ ヲ得ル. 作リ方カラ $K^n_1$ ハ單純連結デアル。

即チ $f$ ハ二ツノ Abbildung ニ分解出来タ。

$$S^m \xrightarrow{g} K^n_1 \xrightarrow{f_1} K^n,$$

$$f = f_1 g.$$

サテ $f$ wesentlich $n$ ナラバ $f_1$ ハ wesentlich $n$ デアル. ソウデナイナラバ $f_1$ ト等シイ Klasse $f'_1$ デ

$$f'(K^n_1) \subset K^{n-1}$$

然ラバ $f'_1 g$ ハ $f$ ト等シイ Klasse デアッテ而モ wesentlich $n$ デナクナル, 假定ニ矛盾.

然ラバ定理3カラ $K^n_1$ 及ビ $K^n$ ニ $n$-Zyklus $Z^n_1$, $Z^n$ ガ存在シ

$$f_1(Z^n_1) = Z^n$$

定理5ノ証明

$K^n$ ニ Zyklus $Z^n$ ガ存在スレバ wesentlich $n$ in sich ハ明ラカデアル. 今 $n$-Zyklus ガ存在シナイトスレバ

$$f : K^n \longrightarrow K^n \ (\text{Identität})$$

ナル Abbildung ハ wesentlich $n$ デアル。

今 $\pi^{n-1}(K^{n-1})$ ノ内 $K^n$ デハ homotop 0 ナル奴ハ部分群 $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ ヲ作ル。

$K^n$ デ係數群ヲ $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ デアル Überdeckung ヲトッテ行クノデアルガ方針ハ Mannigfaltigkeit ノ場合ト変ハラナイ. (本誌第191号. 談話 828.

p. 624)

定理4ニヨッテ $u^n(K^n)=0$. 故ニ $K^n$ ノ Zellenzerlegung.

$$c_1^n, \text{-----}, c_{\alpha_n}^n$$

ヲ作リ

$$\lambda^{n-1}(K^{n-1}) \longrightarrow G(\alpha_n)$$

ナル對應ハ Homomorph auf デアル。從ッテ今度ハ überdeckung ノ係數群ハ唯一ツノ群 $\lambda^{n-1}(K^{n-1})$ デ宜シイ。

<u>定理6ノ証明</u>

$$f: S^n \longrightarrow M^n : \text{grad } 1.$$

Hopf ノ定理ニヨリ $M^n$ ノベッチ数 $p^i$ ($i=1, 2, \text{-----}, n-1$) ハ0デアル．又 grad 1カラ Torsion $t^i$ ($i=1, 2, \text{-----}, n-1$) ハ存在シナイ。

故ニ $M^n$ が單純連結ナラバ $M^n$ ハ Sphäre ト Homortopietypus ヲ等シクスル。(Hurewicz).

今 $M^n$ 單純連結デナイトスレバ、ソノ universelle überlagerungskomplex $\tilde{M}^n$ ヲ作レバ

$$g(\tilde{M}^n) = M^n$$

Abbildung $g$ ニ於ケル Abbildungsgrad $p$ ハ有限、何トナレバ $\tilde{M}^n$ ハ Sphäre カラ wesentlich auf ノ Abbildung $\tilde{f}$ が存在スルカラ geschlossen.

$$\tilde{f}: S^n \longrightarrow \tilde{M}^n.$$

$$f = g\tilde{F}$$

$\tilde{F}$ = 於ケル abbildungsgrad $m$ トスレバ abbildung $f$ ノ grad ハ

$$mp.$$

$mp = 1$ カラ $p = 1$

即チ $M^n$ ハ單純連結デアル。