841. Fourier 級數ノ強総和法ニ關スル注意

河田　龍夫（東北大）

I. 先日數物會誌ニ Fourier 級數論（II）トシテソノ strong summability ニ關スル最近ノ研究ノ報告ヲ試ミマシタガソノ中デ頁數ノ都合ニヨリ省イタノニ Salem ノ研究ガアリマス。

可積分函數 $f(x)$ ノ Fourier 級數ノ部分和ヲ $S_n(x)$ トシ、ソノ算術平均ヲ $\sigma_n(x)$ トシマス．吾々ノ問題ニスルノハ

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|S_n(x)-\sigma_n(x)|^K}{n}\qquad K>0$$

ノ almost everywhere convergence デアリマス．實ハ $K=2$ デ $f(x)\in L_p\ (p>1)$ ノトキハ既ニ非常ニ良イ結果ガ Zygmund ニ依ッテ得ラレテ井マス。（Fund. Math. 30）而シ $K\neq 2$ 又 $f\in L_1$ ノトキハ餘リ結果ガアリマセンノデ、コレニ就イテ泉信一博士及ビ小生ガ結果ヲ出シテミマシタ．（數物會誌參照）

R. Salem ノ研究トイフノハ (1) トヨク似タ級數（$K=1$）ヲ考ヘテ、ソノ almost everywhere conv. ヲ f ノ mean modulus of continuity ヨリ出サウトスルノデス 隨ッテ $f\in L_1$ シカ假定シナイ所ガ興味アルト思ヒマス．詳シク云フト

定理1 (Salem) $f(x)\in L_1$ デ

$$(2)\quad \omega(\delta)=\max_{0<h\leqq\delta}\int_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x)|\,dx$$

ト置クトキモシ

$$(3)\quad \omega(\delta)=O\left(\frac{1}{|\log\delta|^{1+\varepsilon}}\right)\qquad \varepsilon>0$$

ナラバ

$$(4)\quad \sum\frac{|S_n(x)-\theta_n(x)|}{n}$$

ガ alm. ev. conv. デアル。コヽニ

$$(5)\quad \theta_n(x)=\frac{1}{2}\left[S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)+S_n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

Salem ハ是ヲ証明スルノニ次ノ Kolmogoroff ノ定理ヲ用ヒマシタ。$0<p<1$ ナラバ

$$(6)\quad \int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,dx\leqq\frac{A}{\cos\frac{p\pi}{2}}\left[\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx\right]^p$$

2. 先ヅ筆者ノ注意シタイコトハ定理ノ証明ニ(6)ノ代リニ

$$(7)\quad \int_0^{2\pi}\frac{|S_n(x)|}{\log^{1+\varepsilon}(2+|S_n(x)|)}\,dx\leqq A\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx,\qquad \varepsilon>0$$

コヽニAハεニノミ depend スル。

ヲ用レタ方ガ少シ便利ダトイフコトデス。之レハ筆者ガ前ニ証明シタ定理デ，conjugate function ニ関スル Titchmarsh ノ基本的ナ定理ノ直接ノ結果デス。

實際 (7) ヲ使ッテ定理ヲ証明シテ見マス.(考ヘハ Salem ノ考ヘデス)

(7) ニヨリ

$$(8)\quad \int_0^{2\pi} \frac{|S_n(x)-\theta_n(x)|}{\log^{1+\eta}(2+|S_n(x)-\theta_n(x)|)}dx$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi}\left|f(x)-\frac{1}{2}f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)-\frac{1}{2}f\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)\right|dx$$

$$\leqq A\omega\left(\frac{\pi}{2n}\right)\leqq A\omega\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{A}{\log n^{1+\varepsilon}}$$

両辺ヲ λ_n デワッテ sum up スレバ

$$(9)\quad \int_0^{2\pi}\sum \frac{|S_n(x)-\theta_n(x)|}{\lambda_n\log^{1+\eta}(2+|S_n(x)-\theta_n(x)|)}dx$$

$$\leqq A\sum\frac{1}{\lambda_n\log n^{1+\varepsilon}}$$

コノ右辺ガ conv. ナラバ,

$$\sum \frac{|S_n(x)-\theta_n(x)|}{\lambda_n\log^{1+\eta}(2+|S_n(x)-\theta_n(x)|)}$$

ガ alm. ev. conv. シマス。

$$\lambda_n=\frac{n}{(\log\log n)^{1+\eta}}$$ トスレバ明カニ (9) ノ右辺ガ

conv. スルカラ

$$(9).\quad \infty>\sum\frac{|S_n(x)-\theta_n(x)|}{n\log^{1+\eta}(2+|S_n(x)-\theta_n(x)|)}(\log\log n)^{1+\eta}$$

が alm. ev. 成立スル. $S_n(x)-\theta_n(x)=O(\log n)$ が殆ンドスベテノ点デ成立スルカラ (well known)

$$(10)\quad \infty > \sum \frac{|S_n(x)-\theta_n(x)|}{n}, \quad \text{alm. ev.}$$

是デ証明了リ。

3. 上ノ定理デ (4) ノ代リニ (1) ($K=1$) ヲ考ヘレバドウカト云ヒマスト是レニ對シテモ全ク同様ナ事実が成立スル事が判リマス。

定理2. f が可積分デ $\omega(\delta)=O\left(\frac{1}{(\log\delta)^{1+\varepsilon}}\right)$, $(\varepsilon>0)$ ナラバ (1) ($K=1$) が alm. ev. conv. スル。

コノ証明ノタメニ次ノ補助定理ヲ要シマス。

補助定理1. $\alpha(t)=O\left(\frac{1}{|\log t|^K}\right)$ for small t ナラバソノ Fejér 積分ニ就テ

$$(11)\quad I_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \alpha(t)\frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin^2\frac{t}{2}}dt=O\left(\frac{1}{(\log n)^K}\right)$$

が成立スル。

是レハ known デス. (Izumi-Kawata, Notes on Fourier series V, 東北数學雑誌)

是レヲ使フト定理2が容易ニ証明サレマス。

$f(x)-\sigma_n(x)$ ノ部分和ハ $S_n(x)-\sigma_n(x)$ デスカラ (7) ヲ用ヒテ

$$\int_0^{2\pi} \frac{|S_n(x)-\sigma_n(x)|}{\log^{1+\eta}(2+|S_n(x)-\sigma_n(x)|)}\,dx \leqq A\int_0^{2\pi}|f(x)-\sigma_n(x)|\,dx$$

$$\leqq A\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\pi}\left|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right|\frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})t}{nt^2}\,dt$$

$$\leqq A\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})t}{nt^2}\,dt-\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx$$

補助定理ト假定ニヨリ

(12) $$\int_0^{2\pi}\frac{|S_n(x)-\sigma_n(x)|}{\log^{1+\eta}(2+|S_n(x)-\sigma_n(x)|)}\,dx \leqq \frac{A}{(\log n)^{1+\varepsilon}}$$

両辺ヲ $\dfrac{n}{(\log\log n)^{1+\eta}}$ デ割ツテ前ト同ジ論法ヲ繰返セバヨイ。

4. 全ク同様ニシテ

<u>定理 3.</u> $f(x)\in L_1$, $\omega(\delta)=O\left(\dfrac{1}{(\log\log\delta)^{2+\varepsilon}}\right)$,

$\varepsilon<0$

ナラバ殆ドスベテノ点デ

(13) $$\sum\frac{|S_n(x)-\sigma_n(x)|}{n\log n}$$

ガ conv スル。

コノトキハ補助定理 1 ノ代リニ

<u>補助定理 2.</u> $\alpha(t)=O\left(\dfrac{1}{|\log\log t|^{2+\varepsilon}}\right)$ ナラバ $\alpha(t)$

Fejér 積分ガ $O\left(\dfrac{1}{(\log\log n)^{2+\varepsilon}}\right)$ ニナル。

ヲ用ヒマス。（$r<2$ トシテオイテカラ定理1, 2 ト同ジ論法ヲ繰返ス）

コノ補助定理ハ補助定理1ト同ジ様ニシテ証明出来マス。

5. (12) ニ correspond スル不等式ヲ色々ノ数デ割ッタ種々ノ定理ガ得ラレマス。

6. 上ノ analysis ハ次ノ定理ヲ suggest シマス、実際全ク同様ノ論法デ出来マス。(7) ノ代リニ通常ニ M. Riesz ノ定理ヲ用ヒマス。

<u>定理4.</u> $f \in L_p$ $(p>1)$ デ且ツ

$$(14)\qquad \omega_p(\delta) = \max_{0<h\leqq\delta} \int_0^{2\pi} |f(x+t)-f(x)|^p dx$$

ト置クトキ、モシ $\omega_p(\delta) = O\left(\dfrac{1}{|\log\delta|^{1+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon>0$ ナラバ

$$(15)\qquad \sum \frac{|S_n(x)-\sigma_n(x)|^p}{n}$$

ガ alm. ev. conv. スル。

是レハ上ノ論法ト同ジニ出来ルノデスカラ analysis ハ簡単デスガ $p \neq 2$ ノ場合ノ條件ヲ比ベテ本ル点面白クナイコトモナイト思ヒマス、但シ $p=2$ ノトキハ mean modulus of continuity ニ関スル條件ガ全然ナクトモ終結ハ成立シマス。(Zygmund)

随ッテ吾々ノ場合ニモ $\omega_p(\delta)$ ニ関スル條件ガトレル可能性ガアル訳デスガ、コレハ非常ニ六ケ敷イ問題ト思ヒマス。

色々ト考ヘテ見テヰルノデスガ出來マセン。