844. An ergodic theorem of Birkhoff-Khintchine type.

吉田　耕作（阪大）

(0, 1) デ可積分ナ函數 $f(t)$ ガ norm

$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ デ作ル Banach 空間ヲ (L), (L) ノ

(L) 内ヘノ線形寫像 T ガ

(1)　$\|T^n\| \leqq$ 常數 C　　　$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$

ヲ滿足スルトスル.　$T^n f = f^{(n)}$ ト置ク.

$\boxed{\text{定　理}}$

$$2\begin{cases} \text{全テノ } f \in (L) \text{ ニ對シ, almost everywhere ニ} \\ -\infty < \underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t) \end{cases}$$

$$\leqq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t) < +\infty$$

ト假定スルナラバ，與ヘラレタ $g \in (L)$ ニ對シ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}(t) \quad \text{exist almost everywhere}$$

ナルタメノ必充條件ハ

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} g^{(n)}(t) = 0$ almost everywhere

(4) $\displaystyle\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\}$ ガ weakly compact

ノ二ツガ成立ツコトデアル。

$\boxed{\text{證明}}$ 必要ハ明カデアルカラ，充分ヲ證明スル。

先ヅ (1)，(4) ヲ使ヘバ mean ergodic theorem ニヨリ $n \to \infty$ ナルトキ $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)} \to g^* \in (L)$ <u>strongly</u> 且ツ $T \cdot g^* = g^*$. 故ニ $g = g^* + (g - g^*)$ ト置イテ

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)} = g^* + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} (g-g^*)^{(m)}.$$

此ノ右邊ノ第二項 $\to 0$ almost everywhere ガ云ヘルトヨイ. 所が定義カラ $g-g^*$ ハ

(5) $\displaystyle (E-T)\frac{ng+(n-1)T\cdot g+\cdots\cdots+T^n g}{n}$ （E ハ單位寫像）

ノ strong limit. 今各 $f \in (L)$ ニ對シ

$$\tilde{f}(t) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t) - \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t)$$

ヲ對應サセル寫像ヲ考ヘル. (2) ニヨリ $\tilde{f}$ ハ殆ド到ル所有

限且ツ可測デアル。即チ $\widetilde{f}$ ハ殆ンド到ル所有限且ツ可測ナ函数 $h(t)$ ガ norm $\|h\| = \int_0^1 \frac{|h(t)|}{1+|h(t)|}dt$ デ作ル F-type ノ space (S) ニ属スル.

Banach-Saks ノ定理ヲ使ヘバ (L) ノ (S) 内ヘノ寫像 $f \to \widetilde{f} = \widetilde{T} f$ ハ連續デアル。[1] 然ルニ (3) ニヨリ (5) ニ於テハ $\widetilde{T}$ ハ零 (almost everywhere zero) ニナルコトガワカルカラ, (5) ノ limit デアル所ノ $(g-g^*)$ ニ於テモ $\widetilde{T}$ ハ零トナル。 ―以上―

注意 G. D. Birkhoff ノ ergodic theorem ハ T ガ equi-measure ナ点変換ニヨッテ induce サレタ線型寫像ノ場合デアル。コノトキ (2) ノ満足サレラルコトハ, N. Wiener ノ dominated ergodic theorem ノ主張スル所デアル。[2] (3) ガ全テノ $g \in (L)$ ニ對シテ成立ツコトモ $\int_0^1 |g(t)|dt < +\infty$ カラ容易ニ証明デキル (之ハ角谷氏ガ考ヘテ呉レラレタ. 今ハ略ス). (4) ハ Lebesgue ノ定理カラ全テノ $g \in (L)$ ニ對シ満足サレラルコトガワカル。斯ウヤッテ Birkhoff ergodic theorem ノ別証明 (operator theoretical ナ) ガ出來タトモ云ヘル訳デアル。

---

(1) Category 論法デタヤスク証明デキル. 例ヘバ S. Mazur-W. Orlicz: Über Folgen linearer Operationen, Studia Math. 4 (1933) ヲミラレタイ.

(2) Duke Math. J. 5, 1 (1939)

尤モ Wiener 自身ガ d E.T ト M E.T カラ B.E.T ガ出セルコトヲ既ニ証明シテヲルノデアッテ，上ノヤリ方ハ Wiener ノヨリ巧イトハ云ヘナイ。大体 equi-measure 点変換ノ場合デアレバ，既ニ筆者ト角谷氏トガ d.E.T ト B.E.T. トヲ同時ニ証明スルコトガ出来ルコトヲ示シテアルノデアル。[1]

$\boxed{\text{定理}}$ ハ equi-measure 点変換ニ限ラズ一般ノ線型寫像ニ apply デキルノミナラズ、コノトキニモ d.E.T. 型ノ條件 (2) ガ essential ニ利イテ來ルコトガ示サレタ訳デアル。

尚 individual ナ点 g (of (L)) デ individual ergodic theorem (B.E.T.) ガ成立ツカドウカノ議論ニモッテクルコトガ出來タ点モ注意シテヲキタイ。

$\boxed{\text{應用}}$ モシモ

(6) 各 $g \in (L)$ ニ對シ $|g^{(m)}(t)| \leqq \overline{g}(t)$ $(m=1, 2, \cdots)$ ナル如キ $\overline{g} \in (L)$ ノ存在ヲ假定スレバ (1), (2), (3), (4) ノ満足サレラルコトハ明カデアル。G. Birkhoff ハ，抽象的ナ formulation デ，(6) ニ相當スルコトヲ假定シテ

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}$$

weak ナ收斂ヲ証明シタ。[2] 尤モ weak ナ limit ガア

---

(1) 本紙談話 784

(2) Proc. Nat. Acad. Sc. 1938: dependent probability and (L) space.

ルカドウカモ Birkhoff ハ証明シテナイ．彼ノヌッタコトが具体的ニ(L)デ(6)ノ場合ヲヤッタコトニナルコトヲ示シ且ツ $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}$ ノ strong ニ収斂スルコトヲ示シタノが角谷氏デアル。[1] $\boxed{\text{定理}}$ ニヨレバ、モット強ク almost everywhere 収斂が出ル訳デアル。尚他ニ應用デキ相デアルケレドモ又ノ機會ニユヅル。

---

(1) 位相數學，第2巻第一号：抽象(L)空間ノ表現．