845. Stationary distribution ヲモツ Markoff Process ニツイテ II.

角谷　靜夫（阪大）

§3

M(φ) ニ於ケル Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ証明スルタメ先ヅ Infinite product space Ω^* ヲ考へコヽニ completely additive ナ measure $\varphi^*(E)$ ヲ導入スル.

$$\Omega^* = \prod_{-\infty}^{+\infty} \Omega \text{ ハ } t^* = \left\{ \overset{(i)}{t_i} \right\} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots) \text{ ナ}$$

ル点列 t^* ヲ要素トスル空間デ t_i ハ Ω ノ任意ノ点デ t_i.

ノ上ニ書イタ記号(i)ハt_iガt^*ノ第i番目ノ坐標デアルコトヲ示ス。（座標iハ$-\infty$カラ$+\infty$マデアルコトニ注意）。記号的ニ$\Omega^* = \cdots\cdots \overset{(-2)}{\Omega} \times \overset{(-1)}{\Omega} \times \overset{(0)}{\Omega} \times \overset{(1)}{\Omega} \times \overset{(2)}{\Omega} \times \cdots\cdots$ト云フ風ニ表ハスコトニスル。次ニ$\Omega^*$ノ部分集合$E^*$ニテ

$$E^* = \cdots\cdots \times \overset{(m-2)}{\Omega} \times \overset{(m-1)}{\Omega} \times \overset{(m)}{E_m} \times \overset{(m+1)}{E_{m+1}} \times \cdots\cdots \times \overset{(n)}{E_n} \times \overset{(n+1)}{\Omega} \times \overset{(n+2)}{\Omega} \times \cdots\cdots$$

ト云フ形ノモノヲ考ヘル。即チE^*ハ$t_i \in E_i$, $m \leqq i \leqq n$ニテ$t_i \in \Omega$, $i \leqq m-1$, $i \geqq n+1$ナル如キ点列$t^* = \{\overset{(i)}{t_i}\}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$全体ノ集合デアル。コレハ又記号的ニ$E^* = \overset{(m)}{E_m} \times \overset{(m+1)}{E_{m+1}} \times \cdots\cdots \times \overset{(n)}{E_n}$ト書クコトモ出来ル。

ココニE_i $(m \leqq i \leqq n)$ハΩノ Borel 集合デm, nハ$-\infty < m \leqq n < \infty$ヲ満足スル正又ハ負ノ整数デアル。

カカル形ノ集合E^*全体ノ family $\mathcal{E}^*$ヲ考ヘ、

$$F^* = \sum_{i=1}^{n} E_i^*, \quad E_i^* \cdot E_j^* = 0 \quad (i \neq j), \quad E_i^* \in \mathcal{E}^* \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ナル形ノ集合F^*全体ノ family ヲ$\mathcal{F}^*$ニテ表ハス。今$\varphi^*(E^*)$及ビ$\varphi^*(F^*)$ヲ

$$\varphi^*(E^*)$$

$$= \int_{E_m} \int_{E_{m+1}} \cdots\cdots \int_{E_n} \varphi(dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2}) \cdots\cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\varphi^*(F^*) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^*(E_i^*)$$

ニヨツテ定義スレバ $\varphi^*(F^*)$ ハ明カニ $\mathfrak{F}^*$ ニテ定義サレタ finitely additive ナ measure デ且ツ $\varphi^*(\Omega^*)=1$ ヲ満足スル。

シカモ A. Kolmogoroff－T. L. Doob[1] ノ論法ニヨリ $\varphi^*(F^*)$ ハ又 $\mathfrak{F}^*$ ニ於テ completely additive ニナツテヰルコトガワカル。

即チ $F_n^*\in\mathfrak{F}^*$, $F^*\in\mathfrak{F}^*$, $\sum_{n=1}^{\infty}F_n^*=F^*$, $F_mF_n=0$

$(m\neq n)$ デアレバ $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^*(F_n^*)=\varphi^*(F^*)$ トナル。ヨツテ、ヨク知ラレタ方法ニヨリ[2] $\varphi^*(F^*)$ ハ $\mathfrak{F}^*$ ヲ含ム最小ノ Borel family $B(\mathfrak{F}^*)$ ニマデ completely additive ニ拡張出来ル。

今 Ω^* ニ於ケル translation $t^*\to S(t^*)=t^{*\prime}$ ノ

$t^*=\left\{\overset{(i)}{t_i}\right\}$, $t^{*\prime}=\left\{\overset{(i)}{t_{i+1}}\right\}$, $(i=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ ヲ考ヘレバコノ $S(t^*)$ ハ容易ニワカル如ク φ^*－measure

---

(1) A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Math.
J. L. Doob: Stochastré processes with an integral valued parameter, Trom. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 87－150

(2) 例ヘバ E. Hopf: Ergodentheorie, P. 2－3.

*preserving*デアル。

次ニΩ^*ニ他ノ種類ノ*measure*ヲ導入スル．コノタメ．Ω^*ノ部分集合E^*ニテ $E^* = \overset{(m)}{E_m} \times \overset{(m+1)}{E_{m+1}} \times \cdots \times \overset{(n)}{E_n}$（但シ $1 \leqq m \leqq n < \infty$）ナル形ノモノ全体ガ作ル*family* $\overline{\mathcal{E}}^*$ヲ考ヘ更ニ $F^* = \sum_{i=1}^{n} E_i^*$，$E_i^* \cdot E_j^* = 0\ (i \neq j)$。$E_i^* \in \overline{\mathcal{E}}^*\ (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ナル形ノ$F^*$全体ノ*family* $\overline{\mathfrak{F}}^*$ヲ考ヘル．任意ノ$E^* \in \overline{\mathcal{E}}^*$，$F^* \in \mathfrak{F}^*$ニ對シテ

$$\overline{\varphi}^*_{t_0}(E^*)$$

$$= \int_{E_m} \int_{E_{m+1}} \cdots\cdots \int_{E_n} P^{(m)}(t_0, dt_m) P(t_m, dt_{m+1}) P(t_{m+1}, dt_{m+2}) \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

$$\overline{\varphi}^*_{t_0}(F^*) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}^*_{t_0}(E_i^*)$$

トオケバ $\overline{\varphi}^*_{t_0}(F^*)$ハ明カニ$\overline{\mathfrak{F}}^*$デ定義サレタ*finitely additive measure*デアル、シカルニ前ト全ク同様ニシテ$\overline{\varphi}^*_{t_0}(F^*)$ガ$\overline{\mathfrak{F}}^*$デ*completely additive*デアルカラ$\overline{\varphi}^*_{t_0}(F^*)$ハ又$\overline{\mathfrak{F}}^*$ヲ含ム最小ノ*Borel family* $B(\overline{\mathfrak{F}}^*)$ニ拡張スルコトガ出来ル。シカモコノトキ任意ノ$E^* \in B(\overline{\mathfrak{F}}^*)$ニ對シテ

$$(\overset{*}{**}) \quad \int_{\Omega} \varphi(dt_0)\, \overline{\varphi}_{t_0}(E^*) = \varphi(E^*)$$

ガ成立スルコトガ容易ニワカル。

次ニ $M(\varphi)$ ニ於ケル Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ証明シヨウ。上デ述ベタコトニヨリ Ω^* ニ completely additive ナ measure φ^* ト φ^*-measure preserving ナ Ω^* ノ one-to-one transformation (translation) S トガ見ツカッタカラ、$L(\varphi^*)$ ニ關シテ Ω^* 上ニテ ergodic theorem ガ成立スル。即チ

任意ノ $x^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ ニ對シテ $\bar{x}^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ ガ定マツテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x^*(S^n(t^*)) \to \bar{x}^*(t^*)$$

$$\varphi^*\text{-almost everywhere on } \Omega^*$$

トナル。特ニ $x^*(t^*) = x(t_0)$, $t^* = \{t_i^{(i)}\}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$, $x(t) \in M(\varphi)$ ナルトキハ $x^*(t^*) \in M(\varphi^*) \subset L(\varphi^*)$ トナルカラ $\bar{x}^*(t^*) \in L(\varphi^*)$ (實ハ $\bar{x}^*(t^*) \in M(\varphi^*)$) ガ見ツカッテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(t_n) \longrightarrow \bar{x}^*(t^*)$$

$$\varphi^*\text{-almost everywhere on } \Omega^*$$

トナル。コノ收斂ガ成立シナイヨウナ点 t^* ノ集合ヲ E_0^* トセヨ。$E_0^* \in B(\overline{\mathfrak{F}}^*)$ デアルト考ヘテ差支ナイ。ヨツテ今モシ $\bar{\varphi}^*_{t_0}(E_0^*) = 0$ デアレバカヽル $t_0 \in \Omega$ ニ對シテ上式ヲ $\bar{\varphi}^*_{t_0}(E^*)$ ニ關シテ積分スレバ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega}P^{(n)}(t_0, dt_n)x(t_n)$$

$$\longrightarrow \int_{\Omega}\bar{\varphi}^{*}_{t_0}(dt^{*})\bar{x}^{*}(t^{*}) \equiv \bar{x}(t_0)$$

トナル。ヨツテ

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega}P^{(n)}(t_0, dt_n)x(t_n) \to \bar{x}(t_0)$$

ガ φ-almost everywhere ニ成立スルコトヲ証明スルニハ Ω 内ニアル φ-measure zero ナ集合 E_0 ガ見ツカッテ $t_0 \bar{\in} E_0$ ナルトキ $\bar{\varphi}^{*}_{t_0}(E^{*}_0) = 0$ トナルコトヲ証明スレバ十分デアル。シカルニコレハ $(\overset{*}{**})$ ヨリ

$$\int_{\Omega}\varphi(dt_0)\bar{\varphi}^{*}_{t_0}(E^{*}_0) = \varphi^{*}(E^{*}_0) = 0$$

トナルコトヨリ殆ンド明カデアル。

コレデ $M(\varphi)$ ニ於ケル Birkhoff ノ ergodic theorem ノ証明ガ終ル。

§ 4

本 § ニ於テハ inverse probability ヲ考ヘル。$P(t, E)$ ガ stable distribution $\varphi(E)$ ヲモツトキ

$$\Phi(F, E) = \int_{F}\varphi(dt)P(t, E)$$

トオケバ $\Phi(F, E)$ ハ任意ノ Borel set F, E ニ対シテ定義サレテ

$$\Phi(F, E) \leqq \varphi(E), \quad \Phi(\Omega, E) = \varphi(E)$$

ヲ満足スル，ヨッテ各々ノ F ニ対シテ Borel measurable function $R(F, S)$ ガ定マッテ

$$\Phi(F, E) = \int_E R(F, S)\, \varphi(ds)$$

トナル. コヽニ $R(F, S)$ ハ各々ノ F ニ對シテ φ-measure 0 ノ集合ヲ除イテ定マリ且ツ $R(\Omega, S) \equiv 1$ デアル。

然ルニ今 Ω ノ Borel 集合全体ガ φ-measure ニ関シテ separable デアレバ J. V. Neumann - J. L. Doob ノ方法ニヨッテ* $R(F, S)$ ガ各ノ S ニ対シテ F ニ関シテ completely additive デアルト考ヘテヨイコトガワカル。然ルトキハ $R(F, S)$ ハ又一ツノ Markoff Process ト考ヘルコトガ出來ル。

實際 $R(F, S)$ ハ $s \in \Omega$ ナル点ガ（$P(t, E)$ ナル Markoff Process ニテウゴクトキ）単位時間前ニ F ニアッタ probability ニ外ナラヌ。此ノ如ク考ヘルト吉田氏ガ考ヘラレタ $f \rightarrow f^{(-1)}$ ナル逆ノ operator ハ實ハ $R(F, S)$ ナル Markoff process ニ関スル正ノ operator ニ外ナラヌコトガワカル．コノ様ニシテ

---

* コノ方法ガ可能デアルコトハ吉田氏ノ注意ニヨルモノデアリマス、コヽニ吉田氏ニ対シテ感謝致シマス。

$P(t,E)$ ト $R(F,S)$ トハ全ク dual ニナッテヰルコトガ示サレル。(實際 $R(F,S)$ ハ又 $\varphi(E)$ ヲ stable distribution ニモチ、$R(F,S)$ ノ inverse ハ $P(t,E)$ ニナルノデアル)。

コノ duality ノ議論ハ operator-theory ノ方デ考ヘルト大ヘン面白イノデアルガ、コレハ次ノ機會ニユズルコトニスル。