850. Radó-Hall Maak ノ定理ノ擴張及ビソノ Haar measure ノ問題ヘノ應用 I

角谷 靜夫（阪大）

Radó, Hall 及ビ Maak ハ次ノ定理ヲ証明シタ。[1)]

$\boxed{\text{定理 I}}$ 集合 G ヲ二通リノ方法デ n 個ノ部分ニ分割スルトキ、若シ任意ノ $r\ (1 \leqq r \leqq n-1)$ ニ對シテ一方ノ r 個ガ他方ノ $(r+1)$ 個ヲ決シテ含マナイナラバ、コレラノ二ツノ分割カラ共通ノ代表点ヲ選ブコトガ出來ル。

即チ、今 G ヲ次ノ如ク二通リニ分割シタトキ：

---

(1) 証明ハ例ヘバ H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie, 第一巻, 1937, pp. 11–12 參照.

$$G = A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n,\quad A_i \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots\cdots, n),$$

$$A_{i_1} \cdot A_{i_2} = 0\ (i_1 \neq i_2) = B_1 + B_2 + \cdots\cdots + B_n,$$

$$B_j \neq 0\ (j = 1, 2, \cdots\cdots, n).\quad B_{j_1} \cdot B_{j_2} = 0\ (j_1 \neq j_2)$$

若シ次ノ如キ形ノ條件 $(1 \leqq r \leqq n-1)$:

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots\cdots + A_{i_r} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \cdots\cdots + B_{j_{r+1}}$$
$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_r \leqq n;\ 1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_{r+1} \leqq n)$$

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots\cdots + A_{i_{r+1}} \subset B_{j_1} + B_{j_2} + \cdots\cdots + B_{j_r}$$
$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_{r+1} \leqq n;\ 1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_r \leqq n)$$

ノ何レノ一ツモ成立シナイナラバ, $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ ノ適當ナ permutation $\{i_1, i_2, \cdots\cdots, i_n\}$ 及ビ $\{j_1, j_2, \cdots\cdots, j_n\}$ ヲ選ンデ $A_{i_k} \cdot B_{j_k} \neq 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ トナルヨウニスルコトガ出来ル.

W. Maak ハコノ定理ヲ巧妙ニ使用シテ、一般ノ group G ニ於ケル J. v. Neumann ノ意味ノ almost periodic function $f(x)$ ニ對シテ、ソノ mean ガ存在スルコトヲ証明シタ。(2) 特ニ group G ガ compact, separable デアッテ且ツ $f(x)$ ガ G ニ於ケル連續函数デアル場合ヲ考ヘルト、コノ mean ノ存在ハ G ノ Haar ノ measure ノ存在ト同等デアル(3) カラ、

(2) W. Maak: Eine neue Definition der fast periodischen Funktionen, Abh. Hamburg. Univ., 11 (1936), 240. (脚註 (3) ハ次頁へ)

コノ定理1ヲ使フコトニヨツテ compact, separable ナ group G ニ Haar ノ measure が存在スルコトが証明サレタコトニナル。[4]

本談話ニ於テハ、同様ナ principle ニヨツテ、一般ノ locally bicompact ナ group G ニ Haar ノ measure が存在スルコトヲ証明シタイ。

コノタメニハ先ヅ定理1ニ於ケルGノ分割が有限個デナイ場合ヲ論ジナケレバナラナイ。ソレハ locally bicompact ナ group G ハ closure が bicompact ナ open set ノ有限個ヲモッテ覆フコトハ必ズシモ出来ナイカラデアル。

本談話ニ於テハ定理1ヲ次ノ形ニ拡張スル；

$\boxed{\text{定理2}}$ $\mathfrak{A}=\{A_i\}$, ($i=1,2,\cdots\cdots,m$; $A_i\neq 0$ ($i=1,2,\cdots\cdots,m$) $A_{i_1}\cdot A_{i_2}=0$, $i_1\neq i_2$) 及ビ $\mathfrak{B}=\{B_j\}$ ($j=1,2,\cdots\cdots,n$; $B_j\neq 0$ ($j=1,2,\cdots,n$) $B_{j_1}\cdot B_{j_2}=0$, $j_1\neq j_2$) ヲ集合Gノ disjoint ナ部分集合ノ二ツノ system トスル。[5]

然ルトキハ、若シ $\mathfrak{A}$ ノ如何ナル r 個ノ集合ノ和集合モ

---

(3) J. v. Neumann: Zum Haarschen Mass in Topologischen Gruppen, Compositio Math. 1

(4) コノ結果ヲGが(必ズシモ separable デナイ) bicompact group デアル場合ニ拡張スルコトハ容易デアル。

(5) 必ズシモ $m=n$ ト仮定シナイ．又 $A_i\cdot B_j\neq 0$ トナルカモシレナイ。

$\mathfrak{B}$ ノ $(r+1)$ 個ノ集合ヲ含マズ、又逆ニ $\mathfrak{B}$ ノ如何ナル r 個ノ集合ノ和集合モ $\mathfrak{A}$ ノ $(r+1)$ 個ノ集合ヲ含マナイトスレバ $(1 \leqq r \leqq \min(m, n)-1)$ $B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n$ ニ含マレルスベテノ A_i 及ビ $A_1+A_2+\cdots\cdots+A_m$ ニ含マレルスベテノ B_j カラ共通ノ代表点ヲエラビ出スコトガ出来ル。

即チ、若シ次ノ如キ形ノ條件:

(1) $A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots\cdots+A_{i_r} \supset B_{j_1}+B_{j_2}+\cdots\cdots+B_{j_{r+1}}$

$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_r \leqq m;$$
$$1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_{r+1} \leqq n)$$

(2) $A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots\cdots+A_{i_{r+1}} \subset B_{j_1}+B_{j_2}+\cdots\cdots+B_{j_r}$

$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_{r+1} \leqq m;$$
$$1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_r \leqq n)$$

ノ何レノ一ツモ満足サレテ居ナイナラバ、S個ノ集合ヨリナル二ツノ system $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots\cdots, A_{i_s}\}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_s \leqq m)$, $\{B_{j_1}, B_{j_2}, \cdots\cdots, B_{j_s}\}$ $(1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_s \leqq n)$ $(0 \leqq S \leqq \min(m, n))$ ヲ選ンデ $A_{i_k} \cdot B_{j_k} \neq 0$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, S)$ ニテ且ツ $i \neq i_k$, $j \neq j_k$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, S)$ ナルトキ $A_i \not\subset B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n$, $B_j \not\subset A_1+A_2+\cdots\cdots+A_m$ トナル様ニスルコトガ出来ル。

$\boxed{\text{注意1}}$ $m=n$ ニテ且ツ $G=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n = B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n$ ナルトキハ定理2ハ定理1ニ reduce サレル。

$\boxed{\text{注意2}}$ $B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n$ ニ含マレル A_i ノ數ト $A_1+A_2+\cdots\cdots+A_m$ ニ含マレル B_j ノ數トハ必ズシモ一致シナイ。

$\boxed{\text{証明}}$ *Mathematical induction* ニヨル。

$m=1$ 又ハ $n=1$ ナルトキ定理2ハ確カニ正シイ.
ヨッテ (m, n) ナル場合ノ定理2ノ証明ハ (m', n') $(m' \leqq m,\ n' < n$ 又ハ $m' < m,\ n' \leqq n)$ ナル場合ニ *reduce* スルコトニヨッテ完結サレル。

我々ハコノ *reduction* ヲ次ノ三ツノ場合ニ分ケテ遂行スル。

<u>Case 1.</u> <u>或ル r $(1 \leqq r \leqq \min(m, n)$, 但シ $r=m=n$ ナル場合ハ除ク$)$ ニ對シテ</u>

(3) $$A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots\cdots+A_{i_r} \supset B_{j_1}+B_{j_2}+\cdots\cdots+B_{j_r}$$

$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_r \leqq m,$$
$$1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_r \leqq n)$$

<u>ガ成立スルトキ</u>

Suffix ヲツケカヘルコトニヨッテ(3)式ハ實ハ

(4) $$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_r \supset B_1+B_2+\cdots\cdots+B_r$$

デアルト考ヘテモ一般性ヲ失ハナイ。コノトキハ

(5) $$A_i' = A_i - A_i(B_{r+1}+B_{r+2}+\cdots\cdots+B_n)$$
$$i=1, 2, \cdots\cdots, r$$

(6) $$B_j' = B_j - B_j(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_r)$$
$$j=r+1, r+2, \cdots\cdots, n$$

トオキ、此クノ如クシテ得ラレル二組ノ system $\{A'_1, A'_2, \cdots\cdots, A'_r; B_1, B_2, \cdots\cdots, B_r\}$ $\{A_{r+1}, A_{r+2}, \cdots\cdots, A_m; B'_{r+1}, B'_{r+2}, \cdots\cdots, B'_n\}$ ヲ考ヘル．$r=m$ 又ハ $r=n$ ナルトキハ後者ノウチノ A 又ハ B' ガナクナルケレドモ、ソノトキハ後者ノ system ヲ考ヘズ前者ノ system ダケ考ヘルコトニスル。 $r=m=n$ ナル場合ハ (3) ノ假定ニ除外サレテヰルカラ、コノ様ニシテ得ラレタ二組ノ system ノ各々ニ對シテ定理２ノ條件ガ滿足サレテヰルコトヲ証明スレバ、所要ノ reduction ガ得ラレタコトニナル。コノタメニ我々ハ次ノ事実ヲ証明シナケレバナラナイ；

(7) $A'_i \neq 0$ for $i=1,2,\cdots\cdots,r.$

(8) $B'_j \neq 0$ for $j=r+1, r+2, \cdots\cdots, n$

$(\text{if } n>r)$

(9) $A_i \subset B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n \rightarrow A'_i \subset B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n$

$(i=1,2,\cdots\cdots,r)$

(10) $B_j \subset A_1+A_2+\cdots\cdots+A_m$[(6)] $\rightarrow B_j \subset A'_1+A'_2+\cdots\cdots+A'_r$

$(j=1,2,\cdots\cdots,r)$

(11) $A_i \subset B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n \rightarrow A_i \subset B'_{r+1}+B'_{r+2}+\cdots\cdots+B'_n$

$(i=r+1, r+2, \cdots\cdots. m)$

(12) $B_j \subset A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n \rightarrow B'_j \subset A_{r+1}+A_{r+2}+\cdots\cdots+A'_m$

$(j=r+1, r+2, \cdots\cdots, n)$

---

(6) コノ條件ハ(4)ニヨリ $j=1,2,\cdots\cdots,r$ ニ対シテ確カニ滿足サレテヰル。

(13) 次ノ如キ形ノ條件ハ何レノ一ツモ成立シナイ.

(13a) $A'_{i_1}+A'_{i_2}+\cdots\cdots+A'_{i_p}\supset B_{j_1}+B_{j_2}+\cdots\cdots+B_{j_{p+1}}$

$(1\leqq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_p\leqq r;$

$1\leqq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_{p+1}\leqq r)$

(13b) $A'_{i_1}+A'_{i_2}+\cdots\cdots+A'_{i_{p+1}}\subset B_{j_1}+B_{j_2}+\cdots\cdots+B_{j_p}$

$(1\leqq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_{p+1}\leqq r;$

$1\leqq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_p\leqq r)$

(13c) $A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots\cdots+A_{i_p}\supset B_{j_1}+B_{j_2}+\cdots\cdots+B_{j_{p+1}}$

$(r+1\leqq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_p\leqq m;$

$r+1\leqq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_{p+1}\leqq n)$

(13d) $A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots\cdots+A_{i_{p+1}}\subset B'_{j_1}+B'_{j_2}+\cdots\cdots+B'_{j_p}$

$(r+1\leqq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_{p+1}\leqq m;$

$r+1\leqq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_p\leqq n)$

<u>(7)ノ證明</u>　モシ $1\leqq i\leqq r$ ナル i ニ對シテ $A'_i=0$ トナッタトスレバ (5) ニヨリ $A_i\subset B_{r+1}+B_{r+2}+\cdots\cdots+B_n$. シタガッテ (4) ニヨッテ $A_1+A_2+\cdots\cdots+A_{i-1}+A_{i+1}+\cdots\cdots+A_r\supset B_1+B_2+\cdots\cdots+B_r$. コレハ (1) ガ決シテ成立シナイト云フ假定ニ反スル.

<u>(8)ノ證明</u>　モシ $r+1\leqq j\leqq n$ ナル j ニ對シテ $B'_j=0$ トナッタトスレバ (6) ニヨッテ $B_j\subset A_1+A_2+\cdots$

$\cdots\cdots + A_r$. シタガツテ (4) ニヨリ $A_1+A_2+\cdots\cdots+A_r \supset B_1 + B_2 + \cdots\cdots + B_r + B_j$. コレハ (1) ガ決シテ成立シナイト云フ假定ニ反スル。

<u>(9) ノ證明</u>　$A_i' \subset A_i$, $i=1,2,\cdots\cdots,r$ ヨリ明カ。

<u>(10) ノ證明</u>　$1 \leqq j \leqq r$ ナラバ (4) ヨリ

$B_j \subset A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_r$　ヨツテ

$B_j \subset (A_1+A_2+\cdots\cdots+A_r)-(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_r)(B_{r+1} + B_{r+2} + \cdots\cdots + B_n) = A_1' + A_2' + \cdots\cdots + A_r'$.

<u>(11) ノ證明</u>　$A_i \subset B_1 + B_2 + \cdots\cdots + B_n$　$(r+1 \leqq r \leqq m)$ ナラバ $A_i \subset (B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n)-(B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n)(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_r) = B'_{r+1} + B'_{r+2} + \cdots\cdots + B'_n$

<u>(12) ノ證明</u>　$B_j' \subset B_j$, $j = r+1, r+2, \cdots\cdots, n$ ナルコトヨリ明カ。

<u>(13) ノ證明</u>　モシ (13a) 又ハ (13d) ガ成立スレバ $A_i' \subset A_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$, $B_j' \subset B_j$ $(r+1 \leqq j \leqq n)$ ナルコトヨリ

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots\cdots + A_{i_p} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \cdots\cdots + B_{j_{p+1}}$$

$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_p \leqq r \leqq m;$$
$$1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_{p+1} \leqq r \leqq n)$$

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots\cdots + A_{i_{p+1}} \subset B_{j_1} + B_{j_2} + \cdots\cdots + B_{j_p}$$

$$(1 \leqq r+1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_{p+1} \leqq m;$$
$$1 \leqq r+1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_p \leqq n)$$

トナリ、(1), (2) ガ決シテ成立シナイト云フコトニ矛盾スル。

次ニモシ (13 b) ガ成立シタトセヨ。

(13 b') $\quad A'_1+A'_2+\cdots\cdots+A'_{p+1}\subset B_1+B_2+\cdots\cdots+B_p,$

$$1\leqq p<r$$

デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。然ルニ他方 (4) 及ビ (5) ヨリ

$$A'_1+A'_2+\cdots\cdots+A'_r\supset B_1+B_2+\cdots\cdots+B_r$$

ハ明カニ成立スルカラ、コノ式ノ両辺ヨリ (13 b') ノ両辺ヲ引ケバ

$$A'_{p+2}+A'_{p+3}+\cdots\cdots+A'_r\supset B_{p+1}+B_{p+2}+\cdots\cdots+B_r$$

ヨッテ $A_i\supset A'_i$ $(1\leqq i\leqq r)$ ナルコトヨリ

$$A_{p+2}+A_{p+3}+\cdots\cdots+A_r\supset B_{p+1}+B_{p+2}+\cdots\cdots+B_r$$

コレハ (1) ガ決シテ成立シナイト云フ假定ニ矛盾ヲスル。

最後ニ (13 c) ガ成立シタトスレバ、コノ両辺ニ (4) ノ両辺ヲ加ヘルコトニヨリ

$$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_r+A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots\cdots+A_{i_p}\supset B_1$$
$$+B_2+\cdots\cdots+B_r+B'_{j_1}+B'_{j_2}+\cdots\cdots+B'_{j_{p+1}}$$

ヨッテ (6) ヨリ右辺ノダッシュヲ取リ去ルコトガ出来テ

$$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_r+A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots\cdots+A_{i_p}\supset B_1$$
$$+B_2+\cdots\cdots+B_r+B_{j_1}+B_{j_2}+\cdots\cdots+B_{j_{p+1}}$$

コレハ(1)ガ決シテ成立セヌト云フ假定ニ矛盾スル。

Case 2. 或ル r ($1 \leqq r \leqq m$, 但シ $m=n=r$ ナル場合ヲ除ク) ニ対シテ

$$(14)\quad A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots\cdots+A_{i_r}\subset B_{j_1}+B_{j_2}+\cdots\cdots+B_{j_r}$$

$$(1\leqq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_r\leqq m;$$
$$1\leqq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_r\leqq n)$$

トナルトキ

コノ場合ハ Case 1 ト全ク同様ニ論ジラレル。

Case 3. (3) 又ハ (14) ノ如キ形ノ関係ガ決シテ成立シナイトキ

コノトキハ任意ニ A_i, B_j ヲ $A_i\cdot B_j \neq 0$ ナル如ク選ブ (カヽル A_i, B_j ノ pair ガ存在シナイトキハ定理ハ明カニ成立スル) $A_1\cdot B_1 \neq 0$ デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。次ニ

$$(15)\quad A_i' = A_i - A_i\cdot B_1, \quad i=2,3,\cdots\cdots,m$$

$$(16)\quad B_j' = B_j - A_1\cdot B_j', \quad j=2,3,\cdots\cdots,n$$

トオキ $\{A_2', A_3', \cdots\cdots, A_m'; B_2', B_3', \cdots\cdots, B_n'\}$ ナル system ヲ考ヘル。定理2ガコノ system ノ場合ニ reduce サレルコトヲ証明スレバヨイ。コノタメニハ次ノ事実ヲ証明スレバヨイ。

$$(17)\quad A_i' \neq 0 \quad \text{for} \quad i=2,3,\cdots\cdots,m$$

$$(18)\quad B_j' \neq 0 \quad \text{for} \quad j=2,3,\cdots\cdots,n$$

(19) $A_i \subset B_1 + B_2 + \cdots\cdots + B_n \to A'_i \subset B'_2 + B'_3 + \cdots\cdots + B'_n$

$$(i = 2, 3, \cdots\cdots, m)$$

(20) $B_j \subset A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_m \to B'_j \subset A'_2 + A'_3 + \cdots\cdots + A'_m$

$$(j = 2, 3, \cdots\cdots, n)$$

(21) 次ノ如キ形ノ條件ハ何レノ一ツモ成立シナイ:

(21a) $A'_{i_1} + A'_{i_2} + \cdots\cdots + A'_{i_p} \supset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \cdots\cdots + B'_{j_{p+1}}$

$$(2 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_p \leqq m;$$
$$2 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_{p+1} \leqq n)$$

(21b) $A'_{i_1} + A'_{i_2} + \cdots\cdots + A'_{i_{p+1}} \subset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \cdots\cdots + B'_{j_p}$

$$(2 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_{p+1} \leqq m;$$
$$2 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_p \leqq n)$$

(17)ノ証明　$2 \leqq i \leqq m$ ナル i ニ對シテ $A'_i = 0$ トナッタトスレバ (15) ヨリ $A_i \subset B_1$. コレハ (14) ノ如キ形ノ関係ガ決シテ成立シナイト云フコトニ矛盾スル。

(18)ノ証明　(17) ノ証明ト同様.

(19) (20) ノ証明　明ラカ,

(21) ノ証明　(21a) ガ、モシ成立シタトスレバ $A_i \supset A'_i$ $(i = 2, 3, \cdots\cdots, m)$ ナルコトヨリ

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots\cdots + A_{i_p} \supset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \cdots\cdots + B'_{j_{p+1}}$$

ヨッテ

$$A_1 + A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots\cdots + A_{i_p} \supset B'_{j_1} + B'_{j_2} + \cdots\cdots + B'_{j_{p+1}}$$

ノ定義(16)ヨリ右辺ノダッシュガトレテ

$$A_1 + A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots\cdots + A_{i_p} \supset B_{j_1} + B_{j_2} + \cdots\cdots + B_{j_{p+1}}$$

コレハ (3)ガ決シテ成立シナイト云フコトニ矛盾スル。(21k) ガ決シテ成立シナイコトモ全ク同様ニシテ示サレル。 (定理2ノ証明終)

(ツヅク)