852. Compact ナ空間ニ於ケル transition process, I

吉田耕作，角谷静夫（阪大）

$\boxed{\S 1}$ 定常ナ流レノ分析ヲ ergodic theory ノ見地カラ取扱ッタモノノ中デ現在モットモ進ンダ研究ハ N. Kryloff ト N. Bogoliouboff ニヨルソレデアラウ.[1] 彼等ハ compactum (compact ナ距離空間) R ノ R 自身ヘノ位相學的変換ノ one-parameter group P_t $(-\infty < t < +\infty)$:

(1) $\quad P_t P_s = P_{t+s} \qquad (P_0 = \text{恒等変數})$

ヲ ergodic theory ニヨッテ精細ニ analyse シテ

(1) N. Kryloff et N. Bogoliouboff: La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systémes dynamiques de la mécanique non linéaires. Ann. of Math. 38 (1937), 65—113

ヲルノデアル。measure ニ関スル何等ノ制限（例ヘバ invariant-measure ノ存在ノ如キ）ヲモ置カズニ。R ト P_t ニ関スル位相學的ナ假定ノミカラ出發シテヰルト云フ点ニ於テ非常ニ一般ナ研究デアル。

所デ上ノ P_t ヲ "phase space" R ノ transition process

$$x \longrightarrow x' = P_t \cdot x$$

ヲ表ハスモノト考ヘルナラバ，P_t ハ reversible ナ transition process ヲ定義シテヰル訳デアル：

$$P_{-t} P_t = P_t P_{-t} = \text{恒等変換} \quad ((1) \text{ニヨル}).$$

確率論ノ問題ト考ヘルナラバ，transition ノ reversibility ヲ假定シナイデ議論シタイ。

ソコデ次ノヤウニ考ヘテミル。R ノ上デ連続ナ函数 $f(x)$ ノ全体ハ norm $\|f\| = \sup_{x \in R} |f(x)|$ ノ意味デ Banach 空間ヲ作ル。之レヲ (C) ト書ク。各 P_t ハ (C) ノ (C) 内ヘノ線型寫像

$$T_t \cdot f = f^{(t)}, \quad f^{(t)}(x) = f(P_t \cdot x)$$

ヲ定義スル。T_t ハ　i)　$T_t T_s = T_{t+s}$,

ii)　$\|T_t\| = \sup_{\|f\|=1} \|T_t \cdot f\| = 1$,

iii)　positive（$f(x) \geqq 0$ for $x \in R$ ナラ $f^{(t)}(x) \geqq 0$ for $x \in R$

iv)　$f(x) \equiv 1$ ナラバ $f^{(t)}(x) \equiv 1$，　等ノ條件ヲ満足スル。P_t ヲ調ベル代リニ T_t ヲ調ベ，其ノ際 reversible

ノ假定即チ T_{-t} ($t>0$) 存在ノ假定ヲトリ去ッタモノヲ取扱フコトニスレバヨイ訳デアル。之レハ "stable ナ distribution ヲモツ Markoff chain" ノ議論[1] ヲ用フレバ或程度マデ Kryloff-Bogolioubofft ト parallel ニヤレル様ニ思ハレルノデ以下ニ述ベテ見タイ。但シ "差當リ" discrete ナ取扱ヒヲスルコトニスル。問題ヲ discrete ニ formulate スルト

$\boxed{\text{問題}}$ R ヲ compactum, (C) ヲ R デノ連續函數ノ作ル Banach 空間, T ヲ (C) ノ (C) 内ヘノ線型寫像デ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル。

(2) T ハ positive operation (即チ non-negative ナ函数 $\in (C)$ ヲ同ジク non-negative ナ函數 $\in (C)$ ニ寫ス) ニシテ, 且ツ恒等的ニ 1 ナル函數ヲ不変ニスル。

斯カル T ノ iteration T^n ($n=1,2,\cdots$) ヲ analyse スルコト。

$\boxed{\S 2}$ 問題ヲ取扱フタメノ道具トシテ stable distribution ヲモツ Markoff chain ノ議論ノ他ニ以下ニ述ベル定理3が必要デアル。談話ヲ讀ミ易クスルタメニ先ヅ定理1, 2トシテ談話830, 831, 845ノ結果ダケヲ述ベテオキマス。

topology ヲ假定シナイ空間 R ト R ノ部分集合ノ作ル complete additive ナ family $B(R)$ ヲ考

---

(1) 談話830, 831, 845

ハ，（ $\mathcal{R}\in B(\mathcal{R})$ ト假定スル） $B(\mathcal{R})$ ノ要素ニナルヤウナ $\mathcal{R}$ ノ部分集合ヲ $\mathcal{R}$ ノ可測集合ト呼ブ。 $P(x,E)$ ヲ $\mathcal{R}$ ノ点 x ガ，單位時間ノ後ニ *simple Markoff chain* ニヨッテ，$E\in B(\mathcal{R})$ ニ移ル遷移確率トスル。 $P(x,E)$ ハ E ヲ *fix* シタトキ x ノ函數トシテ *measurable*，且ツ x ヲ *fix* シタトキ E ニ關シテ *complete additive*，ト假定スル。今 *non negative* 且 $E\in B(\mathcal{R})$ ニ關シテ *complete additive*，$\varphi(\mathcal{R})=1$ ナル如キ $\varphi(E)$ ニ對シ

$$(3)\qquad \int_{\mathcal{R}}\varphi(dx)P(x,E)=\varphi(E)\quad \textit{for all } E\in B(\mathcal{R})$$

ナルトキ φ ハ *Markoff chain* $P(x,E)$ ノ *stable distribution* デアルト云フノデアル．$\mathcal{R}$ デ可測且ツ $\int_{\mathcal{R}}|f(x)|\varphi(dx)=\|f\|_{\varphi}$ ナル如キ函數 $f(x)$ ノ全体ハ *norm* $\|f\|_{\varphi}$ ノ意味デ *Banach* 空間 (L_{φ}) ヲ作ル．コノトキ・

$\boxed{\text{定理 1}}$ $f\in(L_{\varphi})$ ニ對シ

$$f^{(1)}(x)=\int_{\mathcal{R}}P(x,dy)f(y),$$

$$\int_{\mathcal{R}}f(x)\varphi(dx)P(x,E)=\int_{E}f^{(-1)}(x)\varphi(dx)$$

ナル如キ $f^{(1)}$，$f^{(-1)}\in(L_{\varphi})$ ガ定リ且 $\|f^{(1)}\|_{\varphi}$，$\|f^{(-1)}\|_{\varphi}\leqq\|f\|_{\varphi}$

$\boxed{\text{定理 2}}$ $f^{(2)}(x)=\int_{\mathcal{R}}P(x,dy)f^{(1)}(y),\ldots,f^{(n)}(x)=\int_{\mathcal{R}}P(x,dy)f^{(n-1)}(y),$

$$\int_{\mathcal{R}} f^{(-1)}(x)\varphi(dx)\mathrm{P}(x,\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} f^{(-2)}(x)\varphi(dx), \cdots\cdots,$$

$$\int_{\mathcal{R}} f^{(-n+1)}(x)\varphi(dx)\mathrm{P}(x,dy) = \int_{\mathrm{E}} f^{(-n)}(x)\varphi(dx); \cdots\cdots$$

ヲ定義スルナラバ $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}$, $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(-m)}$ ハ夫々"平均收斂"スル．即チ $f^{(*)}$, $f^{(-*)} \in (\mathrm{L}_\varphi)$ ニ對シ

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)} - f^{(*)}\right\|_\varphi = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(-m)} - f^{(-*)}\right\|_\varphi = 0,$$

且ツ $f^*(x) = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{P}(x,dy) f^*(y)$ (almost everywhere),

$$\int_{\mathcal{R}} f^{(-*)}(x)\varphi(dx)\mathrm{P}(x,dy) = \int_{\mathrm{E}} f^{(-*)}(x)\varphi(dx).$$ 然モ

$f \in (\mathrm{L}_\varphi)$ ガ有界可測函數ノ場合ニハ上ノ"平均收斂"ハ"almost everywhere convergence"デ置キ換ヘラレル。[1]

$\boxed{\text{定理3}}$ $\mathcal{R}$ ヲ compactum, (C) ヲ $\mathcal{R}$ デノ連續ナ函數 $f(x)$ ガ norm $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ デ作ル Banach 空間トスルトキ，(C) ノ上ノ positive[2] ナ線型汎函數 $\mathrm{F}(f)$ ハ

---

(1) 但シ $f^{(-m)}$ ノ方ニツイテ a. e. C. ヲ云フタメニハ，距離 $d(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) = \varphi(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2)$ ノ意味デ $\mathrm{B}(\mathcal{R})$ ガ可分距離空間ニナルコトヲ假定シナケレバナラナイ。

(2) $f(x) \in (\mathrm{C})$ ガ non-negative ナラ $\mathrm{F}(f) \geqq 0$ ナルコト。

$$F(f)=\int_{R} f(x)\,\varphi(dx)$$

ノ形デアル。コヽニ φ ハ R ノ Borel 集合ニ對シテ complete additive 且ツ non-negative ナ集合函數デ $\|F\|=\varphi(R)$.

[証明] R デ Borel-measurable 且ツ有界ナ函数 $f(x)$ ノ全体ハ norm $\|f\|=\sup_{x}|f(x)|$ デ Banach 空間 (M) ヲ作ル。$F(f)$ ハ, Banach ノ extension theorem ニヨリ, norm $\|F\|$ ヲ上ゲナイデ (M) デノ線型汎函數ニ拡張デキル。然モコノトキ (M) デ positive ニナルヤウニ extend デキル。

以下其ノ証明. $f(x)\in(M)$ ニ對シ $\dfrac{|f(x)|+f(x)}{2}=f_{+}(x)$ ヲ以テ f ノ positive part ヲ定義スル。ソコデ $p(f)=\|f_{+}\|\cdot\|F\|$ ト置クト p ハ明カニ

$$\begin{cases} p(f+g)\leqq p(f)+p(g),\quad t\,p(f)=p(tf) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (t\text{ ハ正数又ハ }0) \\ F(f)\leqq p(f)\quad \text{for}\quad f\in(C) \end{cases}$$

ヲ満足スル。コノ最後ノ不等式ハ $F(f)$ ノ (C) ニ於ケル positiveness カラワカル。故ニ Banach ノ extension theorem ニ於ケル p トシテ上ノ p ヲトレバ求ムル結果ヲ得ル。

斯ル (M) デノ positive ナ線型汎函數 $F(f)$ ハ容易ニワカル如ク, R ノ Borel 集合ニ對シ <u>finite additive</u> 且ツ non-negative, $\Theta(R)=\|F\|$,

トル如キ集合函數 $\Theta(E)$ ニヨリ

$$F(f)=\int_{\mathcal{R}} f(x)\,\Theta(dx)$$

ト書ケル。ソコデ $\mathcal{R}$ ノ開集合 O ニ對シ $\Phi(O)=\sup_{F}\Theta(F)$，($F$ ハ O ニ含マレル閉集合) トシ

$$\varphi(A)=\inf_{A\subset O}\Phi(O) \qquad (O\text{ハ開集合})$$

ト置ケバ，良ク知ラレタヤウニ[(1)] $\varphi(A)$ ハ $\mathcal{R}$ ノ Borel 集合ニ對シテ complete-additive ニナル。然シテ $f\in(C)$ ナラバ

$$\int f(x)\,\Theta(dx)=\int f(x)\,\varphi(dx)$$

ナルコトガワカル。ソレニハ $\int f(x)\varphi(dx)$ ノ定義ニ於テ $m=\min_{x} f(x)$，$M=\max_{x} f(x)$ ノ間ヲ $a_0=m<a_1<a_2<\cdots\cdots<a_{n-1}<M=a_n$ ト分割シテ "近似和"

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\varphi(E_i),\quad a_i<x_i<a_{i+1},$$

$$E_i=\underset{x}{E}\{a_i\leqq f(x)<a_{i+1}\}$$

ヲ作ル時ニ $\varphi(\bar{a}_i)=0$ $(i=0,1,\cdots\cdots,n)$，$\bar{a}_i=\underset{x}{E}\{f(x)=a_i\}$ ナル如ク分割スルコトニスレバヨイ。[(2)] 之デ證明ヲ終ル。

---

(1) Hahn - Caratheodory.

(2) $\varphi(\bar{a})>0$ ナル如キ a ハ高々可附番個ナコトハ $\varphi(\mathcal{R})=1$ カラ明ラカ。

$\boxed{\text{系}}$ (C) ノ conjugate space トハ linear fonctionals on (C) トシテ) locally weakly compact デアル。[1]

$\boxed{\text{注意}}$ コノ系ハ essential ニハ Kryloff-Bogolionboff ノ論文 loc. cit. ニ於ケル基本的ナ定理Ⅰト同等デアル。併シ定理3ノ如ク Banach 空間ノ定理トシテ述ベテ上ノ様ニ系3ヲ導イタ方が意味がワカリ易イ。

偖テ定理3ヲ使ヘバ $\boxed{\text{問題}}$ ヲ Markoff chain ノ問題ニ焼キナホスコトハ訳ハナイ。即チ $f^{(1)}=T\cdot f$, $f\in(C)$ トシ, x ヲ fix スレバ $f^{(1)}(x)$ ハ (C) ノ上ノ positive ナ linear functional ダカラ $P(x,E)$ ナル non-negative 且ツ Borel 集合ニ對シ complete-additive ナ measure デ

$$(3)\quad f^{(1)}(x)=\int_R P(x,dy)f(y)$$

ト表ハサレル。$T\cdot 1=1$ (假定(2)) カラ $P(x,R)\equiv 1$. 又 $f^{(1)}(x)\in(C)$ カラ $P(x,E)$ が E ヲ fix シタトキ x ノ Borel-measurable ナ函數ニナルコトモ明カ。故ニ $\boxed{\text{問題}}$ ハ

(3) が (C) ノ (C) 内ヘノ線型寫像ヲ定義シテル様ナ Markoff chain ノ問題ト同等デアルコトが分ッタ。

---

(1) (C) ノ separability ニヨル。

以上デ問題ノ formulation ト道具トガ出来タカラ次カラ本論ニ入リタイ。