853. Independent variable ノ和ニ関スル Marcinkiewicz ノ定理ノ一証明

角谷　静夫(阪大)

Mathematical Reviews vol. 1. no. 1 P. 21 ニヨレバ J. Marcinkiewicz ハ Bull. Sém. Math. Wilno, vol 2 (1939), 22—34 ニ於テ次ノ定理ヲ証明シテヰル: (*)

定理 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ヲ互ニ independent デ且ツ symmetric ナ（即チ $P_r(X_i > l) = P_r(-X_i > l)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ ガ任意ノ $l \geqq 0$ ニ対シテ成立スル）variable トスル。然ルトキハ

$$P_r(S^* \geqq l) \leqq 2 P_r(S \geqq l)$$

ガ任意ノ $l \geqq 0$ ニ対シテ成立スル。但シ

$$S^* = \max(X_1, X_1 + X_2, \cdots, X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

(*) 勿論 Marcinkiewicz ハコノ他ニモ多クノ結果ヲ証明シテヰル。

トオク。

Marcinkiewicz が如何ナル方法デコノ定理ヲ証明シタカハワカラナイが、コノ結果ハ Lévy ノ結果(Lévy ノ書物, Addition des variable aleatoires, P. 138)ニ比シテ精密デアルノデ注目スベキデアロウ。(勿論 Lévy ノ結果ハ必ズシモ symmetric デナイ variable ニ對シテ成立スルノデアルカラ Marcinkiewicz ノ結果が Lévy ノ結果ヨリ良イトハ直ナニ断言ハ出來ナイ。

コノ定理ノ簡単ナ証明がミツカッタカシコレヲ次ニ述ベヨウ。

$\boxed{\text{定理ノ証明}}$

$$Pr(S^* \geqq l)$$

$$= Pr\left(\max_{1 \leqq i \leqq n}(X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_i) \geqq l\right)$$

$$= Pr(S \geqq l) + \sum_{i=1}^{n-1} Pr(X_1 < l,\ X_1 + X_2 < l, \cdots\cdots,$$

$$X_1 + \cdots\cdots + X_{i-1} < l,\ X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_i \geqq l,$$

$$X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n < l)$$

$$= Pr(S \geqq l) + \sum_{i=1}^{n-1} Pr(X_1 < l,\ X_1 + X_2 < l, \cdots\cdots,$$

$$X_1 + \cdots\cdots + X_{i-1} < l,\ X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_i \geqq l.$$

$$X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_i - X_{i+1} - \cdots\cdots - X_n < l)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq P_r(S \geqq l) + \sum_{i=1}^{n-1} P_r(X_1 < l,\ X_1 + X_2 < l, \cdots\cdots, \\
&\qquad X_1 + \cdots\cdots + X_{i-1} < l,\ X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_i \geqq l, \\
&\qquad X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_i + X_{i+1} + \cdots\cdots + X_n \geqq l) \\
&\leqq P_r(S \geqq l) + P_r(S \geqq l) = 2P_r(S \geqq l).
\end{aligned}
$$