# 855. ぢをふあんたす近似論ニ於ケル最近ノ研究（第三報）

武隈　良一（北海道室蘭中學）

## はじめに

第一報ハ東京物理學校雑誌第５７２号（昭和十四年七月号）ニ掲載サレ其ノ内容ハ次ノ通リデアリマス。

1. Hurwitz ノ定理ノ二次虚數体ニ於ケル擴張.

2. 非同次一次式ノ絶對値ノ大キサニ就テ.

3. $n$ 個ノ非同次一次式ノ不定近似.

第二報ハ日本中等教育數學會雑誌第二十一巻第六号（昭和十四年十二月発行）ニ掲載サレ其ノ内容ハ Mordell ノ問題ヲ論ジタモノデアリマス。以下其ノ後ノ発展並ビニ既報ニ洩レタ重要事項ヲ述べサセテ頂キマス。

× × × × × × ×

## 1. Kronecker ノ定理ノ証明

コヽニ Kronecker ノ定理トイフノハ次ノ有名ナ定理ヲサス。

定理. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_N$ ガ一次的ニ独立ナ實數ナルトキ, $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots \phi_N$ ヲ任意ノ實數, $\varepsilon$ ヲ任意ニ小ナル正數トスルトキ, 適當ニ實數 $t$, 整數 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_N$ ヲ見出シテ

$$|\lambda_n t - \phi_n - A_n| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots N)$$

ナラシメル事ガ出來ル。

コノ定理ノ証明ハ非常ニ多クアルト聞イテマスガ以下ノ論文ニ示サレタ以外ニ興味深キモノガアルデセウカ、若シアッタナラバ御教示ヲ仰ギタイト思ヒマス.

1. Weyl. Math. Annalen 77 (1916) 331 — 352
2. Bohr. Proc. Lon. Math. Soc. (2) 21 (1922) 315 — 316.
3. Lettenmeyer. 同上 306 — 314.
4. Bohr ト Jensen. Journal London Math. Soc. 7 (1932) 274 — 275.
5. Estermann. 仝上 8 (1933) 18 — 20.
6. Bohr. 仝上 9 (1934).

## 2. Oppenheim ノ定理

二次虚数体 $k(\sqrt{-m})$ ニ於テ $m$ ガ與ヘラレタトキ任意ノ複素數 $\alpha$ ニ對シテ

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqq\frac{\gamma}{|q|^2}$$

ヲ滿足スル數体 $k(\sqrt{-m})$ ノ整數 $p, q\ (\neq 0)$ ノ組ガ無限ニ存在スルタメ且ツソレニ反シアル複素數 $\beta$ ニ對シテ

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|\leqq\frac{\gamma-\varepsilon}{|q|^2}\qquad(\varepsilon>0)$$

ガ有限個シカ組ヲ持タナイタメニハ $\gamma$ ヲ如何ニ定ムベキカトイフ問題ニ對シテハ既ニ第一報第一章ニ於テ Nikolaus ガ結論ヲ與ヘテ居ルガ其ノ後 Oppenheim ハ Mh. Math Phys. 46, 196 (1937) ニ於テ次ノ如ク拡張シテ居ル。

定理

$m\equiv 3\ (\mathrm{mod.}\ 4)$ ナルトキ $\mu=\frac{1}{2}$

$m\not\equiv 3\ (\mathrm{mod.}\ 4)$ ナルトキ $\mu=1$

トセバ

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqq\frac{\sqrt{\frac{\mu^2 m}{2}}}{|q|^2}$$

ヲ滿足スル數体 $k(\sqrt{-m})$ ノ整數 $p, q$ ノ組ハ無限ニ存在スル。

證明ハ二次形式論ノ定理ニヨル。

## 3. 三ツノ一次同次式ノ積

例ヘバ $|ax^2+2hxy+by^2|$ ヲ $x, y$ ノ $0$ デナイ整數値ニ對シテナルベク小ナラシムルコトトイフ二次ノ問題ニ就テハ次ノ諸定理ガアル。

定理 1. $\Delta = ab-h^2 > 0$ ナルトキ

$$|ax^2+2hxy+by^2| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\Delta}$$

ナラシムル $x, y$ ノ整數値ガ存在スル。

定理 2. $\Delta = ab-h^2 < 0$ ナルトキ

$$|ax^2+2hxy+by^2| \leqq 2\sqrt{\frac{\Delta}{5}}$$

ナラシムル $x, y$ ノ整數値ガ存在スル。

定理 3. ( Minkowski )

$$|(ax+by+c)(a'x+b'y+c)| \leqq \frac{|ab'-a'b|}{4}$$

ナラシムル $x, y$ ノ整數値ノ組ハ無數ニアル。

コノ Minkowski ノ定理ノ証明ハ彼ノ著書 Diophantische Approximationen 45頁ニアルガ最近 Askar ガ Math. Annalen 115 (1938) ニ於テ新シイ証明ヲ與ヘテ居ル。

サテ二次ノ問題ハソノ性質上一次ノ問題ト甚ダ類似シテ居ルガ三次以上ノ場合トナルト特殊ナ困難ヲ伴ッテ來ル。ソノ三次ノ場合ニ對シテ Davenport ガ Journal London Math. Soc. 13 (1938) ニ於テイサヽカ解決ヲ與ヘテ居ルノヲ以下ニ述ベヤウト思フ。

今$\xi, \eta, \zeta$ハ$x, y, z$ニ関スル一次同次式ヲ表ハスモノトシソノ行列式ノ値ハ1ナリトス。$x, y, z$ガ全部ハ0デナイ整数ナルトキ

$$M = \min |\xi \eta \zeta| \quad \cdots\cdots (1)$$

トオケバ Minkowski ノ結果*

$$\min (|\xi| + |\eta| + |\zeta|) \leqq 3\left(\frac{4}{19}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \cdots\cdots (2)$$

ニヨリ $M \leqq \frac{4}{19} \left(= \frac{1}{4.75}\right) \quad \cdots\cdots (3)$

ナルコトハ良ク知ラレテルコトデアル。

Davenport ハ

$$M \leqq 8\left((3+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right)^{-2} = \frac{1}{6.07} \quad \cdots\cdots (4)$$

ナルコトヲ証明シタノデアル。ソノ為ニ次ノ Lemma ヲ先ヅ証明シソレヲ用ヒタノデアル。

Lemma

$$\min_{u,v>0} \left\{ u + v + \max\left(\frac{1}{uv}, \frac{1}{|(u-1)(v-1)|} - 1\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left((3+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right) = 3.484 \cdots\cdots$$

Lemma ノ証明ハ省キ直チニ Davenport ノ定理ノ証明ニ入ラウ。

先ヅ任意ニ小ナル正数$\varepsilon$ニ対シテ

$$M \leqq |\xi_0 \eta_0 \zeta_0| < M(1+\varepsilon)$$

ヲ満足スル如キ$\xi, \eta, \zeta$ノ値$\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ガ存在スル。但シ$x, y,$

*) 彼ノ全集第二巻3—42ヲ見ヨ。

$z$ノ整數値ハ全部ハ0デナイトス。今

$$P=|\xi_0\eta_0\zeta_0|^{\frac{1}{3}} \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

トスルトキ $\xi, \eta, \zeta$ ヲ $\dfrac{\xi P}{|\xi_0|}$, $\dfrac{\eta P}{|\eta_0|}$, $\dfrac{\zeta P}{|\zeta_0|}$ ニヨッテ

置換出來ルカラ

$$|\xi_0|=|\eta_0|=|\zeta_0|=P$$

トオイテモ一般性ハ失ハレナイ。從ッテPハ

$$M\leqq P^3<M(1+\varepsilon)$$

ヲ滿足スル。サテ

$$|\xi|+|\eta|+|\zeta|$$

ヲ考ヘヤウ。コノ式ガ正ノ極小値ヲトルトキノ格子点ヲ$(x_1, y_1, z_1)$トシ又$(x_2, y_2, z_2)$ハ$(0, 0, 0)$ト$(x_1, y_1, z_1)$ト共ニ一直線上ニナイ点トシコノ制限ノ下ニソノ点ニ於テ上式ハ極小値ヲトルモノトス。次ニ$(x_3, y_3, z_3)$ハ$(0, 0, 0)$ $(x_1, y_1, z_1)$ $(x_2, y_2, z_2)$ト共ニ同一平面上ニナイ点トシ，コノ制限ノ下ニソノ点ニ於テ上式ハ極小値ヲトルモノトス。

$\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ ヲ $x_i, y_i, z_i$ ニ對應スル $\xi, \eta, \zeta$ ノ値トシ

$$3S_i=|\xi_i|+|\eta_i|+|\zeta_i|$$

トセバ Minkowski ノ定理*ニヨリ

$$(3S_1)(3S_2)(3S_3)J\leqq 8 \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

ナリ。茲ニJハ八面体 $|\xi|+|\eta|+|\zeta|\leqq 1$ ノ体積デアル。

---

* 彼ノ著書 Geometrie der Zahlen (1910) 第五章ヲ見ヨ。

$J = \frac{8}{6}$ ナル故特ニ

$$S_1 S_2^2 \leqq \frac{2}{9} \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

トナル。従テ算術及ビ幾何平均ノ不等式ニヨリ

$$M \leqq S_1^3$$

トナル。$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ノ少クトモ一ツハ $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ $(-\xi_0, -\eta_0, -\zeta_0)$ トハ相異ナッテ居ル。今 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \neq (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ トシテモ一般性ハ失ハレナイカラ $\xi_0$, $\xi_i$ ハ同符号，$\eta_0$, $\eta_i$ ハ同符号トナル。茲ニ $i$ ハ 1 又ハ 2 デアル。次ニ $\xi_i - \xi_0$, $\eta_i - \eta_0$, $\zeta_i - \zeta_0$ ハ $x, y, z$ ノ全部ガ 0 デナイ整数ナルトキノ $\xi, \eta, \zeta$ ノ値ナル故

$$|(\xi_i - \xi_0)(\eta_i - \eta_0)(\zeta_i - \zeta_0)| \geqq M$$

従テ $\quad |(|\xi_i| - P)(|\eta_i| - P)(|\zeta_i| + P)| \geqq M$

トナル，今

$$u = \frac{|\xi_i|}{P}, \quad v = \frac{|\eta_i|}{P}, \quad w = \frac{|\zeta_i|}{P}$$

トセバ $\quad uvw \geqq \frac{1}{1+\varepsilon}$

$$|(u-1)(v-1)|(w+1) \geqq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$u + v + w = \frac{3S_i}{P} \leqq \frac{3S_2}{M^{\frac{1}{3}}}$$

$$\leqq \frac{3}{M^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{S_1^{\frac{1}{2}}} \leqq 3\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}}$$

$\varepsilon$ ハ任意ニ小ナル正数ナルヲ以テ Lemma ニヨリ

$$3\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} \geqq \underset{u,v>0}{Min}\left\{u+v+max\left(\frac{1}{uv}, \frac{1}{|(u-1)(v-1)|}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left((3+\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right)$$

コレヨリ定理ノ結果ヲ得。

## 4. 和算ニ於ケル不定近似

和算ニ於テモぢをふあんたす近似論ガ論ジラレテ居ッタトノ発見ガ近頃藤原博士ニヨッテナサレマシタ。ソレハ建部賢弘著ノ累約術デアッテ次ノ三問題ヲ論ジラルトノコトデス。

1) $|x-\alpha y|<\varepsilon$

2) $|x-\alpha y+\beta|<\varepsilon$

3) $|x-\alpha y-\beta|<\varepsilon$

$\alpha, \beta$ ハ實數, $x, y$ ハ整數.

實ニ関孝和ノ行列式ト共ニコノ建部賢弘ノ累約術ハ日本數学ノ世界ニ誇ルニ足ルモノデアリマス。詳細ハ次ノ諸雑誌ヲ参照サレタイ。

1. 大塚數學會誌（15年1月号）
2. Proceeding of the Imperial Academy 第15巻第5号（1939）

（以上）