861 Stochastic Fourier Series. I

河田龍夫 (仙台高工)

1. X_t $(-\infty < t < \infty)$ ヲ stationary process トスル。(Khintchine ノ意味デ). 即チ X_t ヲ chance variables, family デスベテノ t ニ對シテ EX_t^2, EX_t ガ exist スルトスル。更ニ EX_tX_u ハ $|t-u|$ ノ i ノ函數トスル. 茲ニ E ハ mean value (expectation) ヲ表ス. 換言スルト

$$EX_tX_u = \rho(t-u), \ (\rho \text{ ハ even function})$$

吾々ハ一般性ヲ失ハズシテ $EX_t = 0$, $EX_t^2 = 1$ トスル。Khintchine ノ基本定理ニ依レバ

$$\rho(i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ix \, dF(x)$$

トカケルコトガ X_t ガ stationary process ナルタメノ必要充分條件デアル。$F(x)$ ハ一ツノ distribution function デアル。

2. $F(x) = 0$ $\quad x \leqq 0$ ト假定スル (以下ノ議論ニ對シテ是ハ本質的ナ假定デナイ). 今 $F(x)$ ノ spectrum ハ discrete スル、即チ λ_i ヲソノ spectrum トスルト Slutsky ハ次ノ事実ヲ証明シタ。(Actualité, Les fonctions aléatoires 1938)

$$\begin{matrix} A_{\lambda T} \\ B_{\lambda T} \end{matrix} = \frac{2}{T}\int_0^T X_t \begin{matrix} \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \end{matrix} \, dt$$

トオク。

$\lambda=\lambda_i$ ノトキニノミ $E(A_{\lambda T}-A_\lambda)\to 0$,

$E(B_{\lambda T}-B_\lambda)\to 0$ $(T\to\infty)$ ナル A_λ, B_λ $(\neq 0)$ ガアル，ソシテ

$$\sum (A_{\lambda_i}^2+B_{\lambda_i}^2)<\infty$$

ガ prob. 1 ヲ以テ成立シ，x_t ガ t ノ函数トシテ B^2. a. p トナリ（prob. 1 デ）

$$\sum_i A_{\lambda_i}\cos\lambda_i t+B_{\lambda_i}\sin\lambda_i t$$

ガソノ Fourier series (stochastic Fourier series) トナル。而モ α_i ヲ

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots<\infty$$

ナル如キ any pcs. numbers ノ seq. トシ ε_i ヲ

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots<\infty$$

ナル pcs. numbers ノ seq. トシ n_i ヲ

$$\frac{\theta_1}{\varepsilon_1^2}+\frac{\theta_2}{\varepsilon_2^2}+\cdots\cdots<\infty,\quad \theta_i=\sum_{n_i+1}^{\infty}\alpha_i$$

ナル如キモノトスル。ソウスルト

$$\sum_1^{n_k} A_{\lambda_i}\cos\lambda_i t+B_{\lambda_i}\sin\lambda_i t$$

ハ $k\to\infty$ ノトキ殆ドスベテノ t デ conv. スル prob. ガ 1 デアル。

3. 吾々ハ $F(x)$ ノ spectrum ガ $0, 1, 2, \cdots\cdots$ ニ含マレル場合ヲ考ヘル　コノトキハ stochastic Fourier

series ガ prob. 1 ヲ以テ alm. everywhere conv. スルコトヲ証明スル.

定理1. X_t ハ prob. 1 ヲ以テ periodic function (period 2π) トナル。

何トナレバ

$$E(X_{t+2\pi}-X_t)^2 = EX_{t+2\pi}^2 + EX_t^2 - 2EX_{t+2\pi}X_t$$
$$= 1+1-2\rho(2\pi)$$
$$= 2\left(1-\sum_0^\infty a_i\right) = 0$$

コヽニ $F(x)$ ノ spectrum i ニ於ケル jump ヲ a_i トスル. $a_i \geqq 0$.

prob. 1 ヲ以ヲ y_t ガ periodic デアルカラソノ Fourier series ヲ

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nt$$

トスル。A_n ハ stochastic Fourier coeff. トイハレル。

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} X_t \cos nt \, dt.$$

補助定理. $EA_n^2 = a_n$, $EA_iA_j = 0 \ (i \neq j)$

何トナレバ
$$EA_n^2 = E\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} X_t \cos nt\, dt\right)^2$$
$$= \frac{1}{\pi^2}E\left(\int_0^{2\pi} X_t \cos nt\, dt \int_0^{2\pi} X_u \cos nu\, du\right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} du \cos nt \cos nu\, E X_t X_u$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} du \cos nt \cos nu\, \rho(t-u)$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} du \cos nt \cos nu \sum_0^{\infty} a_\nu \cos \nu(t-u)$$

$$= \sum_0^{\infty} a_\nu \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} du \cos nt \cos nu \cos \nu t \cos \nu u$$

$$+ \sum_0^{\infty} a_\nu \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} du \cos nt \cos nu \sin \nu t \sin \nu u$$

コノ第一項ノ$\sum$ノ中デハ $\nu=n$ ノトキノミ 0ト異ナリ他ハスベテ0デアル。故ニ

$$E A_n^2 = a_n$$

$EA_iA_j=0$ モ同様ニ出來ル。

定理2. 殆ンドスベテノ t ニ對シテ (1) ガ X_t ヘ收斂スル確率ガ 1 デアル。

コノ定理ハ次ノ定理ニ含マレル。

定理3. $S_n(t)$ ヲ (1) ノ n-th partial sum トシ $n(t)$ ヲ integral valued function デ $n(t) \leqq n$ トスルト probability 1 ヲ以テ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{S_{n(t)}(t)\right\}^2 dt \leqq O(1)$$

$$S_{n(t)}(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \psi_\nu(t) A_\nu \cos \nu t$$

コヽニ $\psi_\nu(t)$ ハーツノ t-set-E_ν デ1ニナリ他デハ0ニナル函數デアル。

但シ $E_\nu \geqq E_{\nu+1}$。従ッテ $\psi_\nu(t)$ ハ non-increasing sequence デアル。

$$I=\int_0^{2\pi}\left\{S_{n(t)}(t)\right\}^2 dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{n}\psi_\nu(t)A_\nu\cos\nu t\right)^2 dt$$

$$\Delta\psi_\nu(t)=\psi_\nu(t)-\psi_{\nu+1}(t) \qquad \nu<n$$

$$\Delta\psi_n(t)=\psi_n(t)$$

トスレバ

$$\leqq\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{n}\Delta\psi_\nu(t)S_\nu(t)\right)^2 dt$$

$$\leqq\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{n}\Delta\psi_\nu(t)\sum_{\nu=0}^{n}\Delta\psi_\nu(t)S_\nu^2(t)\right)dt$$

$$\leqq\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta\psi_\nu(t)S_\nu^2(t)\,dt$$

故ニ

$$EI\leqq\sum_{\nu=0}^{n}\int_0^{2\pi}\Delta\psi_\nu(t)\,ES_\nu^2(t)\,dt$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\int_0^{2\pi}\Delta\psi_\nu(t)\;E\Big(\sum_{k=0}^{\nu}A_k^2\cos^2 kt$$

$$+2\sum_{0\leqq k<j\leqq\nu}A_kA_j\cos kt\cos jt\Big)\,dt$$

補助定理ニヨリ

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\int_0^{2\pi}\Delta\psi_\nu(t)\sum_{k=0}^{\nu}a_k\cos^2 kt\,dt$$

$$\leqq\sum_{\nu=0}^{n}\int_0^{2\pi}\Delta\psi_\nu(t)\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)dt$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\int_0^{2\pi}\Delta\psi_\nu(t)\,dt\leqq\int_0^{2\pi}\psi_0(t)\,dt\leqq 2\pi$$

定理3カラ 2 ノ出ルコトハ Fourier series デヨク知ラレテヰル通常ノ方法ニヨリ明カデアロウ。