863. Characteristic function ノ Non-vanishing

河田　龍夫（仙台高工）

1. 東北數學雜誌 46 ノ part 2 (1940), Non-vanishing of functions and relatead problems ニオイテ

定理 1. $\sigma(x)$ ガ distribution function デアル const a ニ對シ

(1) $$\sigma(-u+a)-\sigma(-u-a)=O\left(\exp\left(-\theta(u)\right)\right), \quad u \to +\infty$$

トスル、コヽニ $\theta(u)$ ハ $u>0$ デ定義サレタ positive increasing function デ

(2) $$\int_1^\infty \frac{\theta(u)}{u^2}\,du=\infty$$

トスル．ソウスルト

(3) $$\Lambda(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}d\sigma(u)$$

ハ如何ナル interval ニ於テモ 0 ニナレナイ。

ヲ証明シマシタ、コノ前ノ談話デ此ノ定理ヲ用ヒテ次ノ定理ヲ得マシタ。

<u>定理2</u>. X ヲ一ツノ chance variable トシ $\sigma(u)$ ヲソノ distribution function トスル. ソシテアル const. $a(>0)$ ニ對シテ (1) ガ満足サレテヰルトスル。若ニ $\theta(a)$ ハ (2) ヲ満足サセルトスル, ソノトキモシ X ガ一ツノ variable ニヨッテ divisible デアレバソノ結果ハ unique デアル。

2. 定理1ノ條件(2)ハ是以上弛メラレナイコトヲ証明シマス. 即チ

<u>定理3</u>. $\theta(u)$ ガ $u>0$ デ定義サレタ positive increasing function デ

(4) $$\int_1^{\infty}\frac{\theta(u)}{u^2}du<\infty$$

トスル・ソウスルト任意ノ pos. const. a ニ對シ $\sigma(u)$ ガ (1) ヲ満足サセ、且ツソノ characteristic function $\Lambda(x)$ ガ $(-l,\ l)$ ノ外デハ 0 ニナル如キモノガアル (l ハ任意ノ正數)

是ハ次ノ補助定理カラ得ラレマス。

補助定理1. $\theta(u)$ ヲ定理3ニ於ケル函數トシ (4) ガ満足サレテヰルナラバ一ツノ non-null ナ函數 $G(x)$ ガ存

在シテ

$$G(x) = O(\exp(-\theta(x)))$$

デ且ツ

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-iux} dx$$

ガ $(-l, l)$ ノ外デ 0 ニナル。

是ハ N. Levinson (On a class of non-vanishing functions, Proc. London Math. Soc. 41 (1936) Lemma 4), A Ingham (A note on Fourier transform, Journ. London Math. Soc., 9) ニ依テ証明サレマシタ。

補助定理 2. $\psi(x)$ ガ $L_2(-\infty, \infty)$ ノ non-null ナ函数トスル。

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi}(x)\, \psi(x+u)\, dx$$

ヲ作ルト $\varphi(t)/\varphi(0) = \varphi_1(t)$ ハ一ツノ distribution function ノ characteristic function デアル。

是レハ A. Khintchine ノ定理ノ special case デアリマス。

(Bull. Moscou t. 1)

3. 定理 3 ヲ証明シマス. $\theta(2u)$ ハ勿論 (4) ヲ満足サセル。今, 補助定理 1 デ $\theta(u)$ ノ代リ = $\theta(2u)$ ヲ考ヘ l トシテ $l/2$ ヲ考ヘテソノトキノ $F(u)$ ヲトル. 是ハ $|u| > \frac{l}{2}$ デ 0 トナル。

$$\lambda(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,F(x+t)\,dx$$

ト置キ $\lambda(t)/\lambda(0)=\Lambda(t)$ ヲ考ヘルト，是レハ補助定理2ニヨツテ一ツノ characteristic function デ

$\Lambda(t)=0\ (|t|>l)$

直接計算ニヨツテ容易ニ判ル如ク

$$\sigma(-u+a)-\sigma(-u-a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(x)\frac{\sin ax}{ax}e^{iux}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l}\frac{\sin ax}{ax}e^{iux}dx\int_{-l/2}^{l/2}F(x+t)F(t)\,dt.$$

$$=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}F(t)dt\int_{-l}^{l}F(x+t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ax}{ax}e^{iux}dx$$

Fourier transform ニ於ケル Perseval ノ定理カラ

$$=\frac{1}{2a}\int_{-l/2}^{l/2}F(t)\,dt\int_{-a}^{a}G(u-y)e^{-i(u-y)t}dy$$

$$=O\left(\int_{-\frac{l}{2}}^{l/2}|F(t)|\,dt\int_{-a}^{a}|G(u-y)|\,dy\right)$$

$$=O\left(\int_{-a}^{a}e^{-\theta(2u-2y)}dy\right)$$

$$=O\left(e^{-\theta(2u-2a)}\right)=O\left(e^{-\theta(u)}\right),\quad (u>a)$$

此 $\sigma(u)$ ガ吾々ノ欲スルモノデアル。

4. 定理2デ條件(4)ガ弛メラレナイコトモ間違ヒナカロウト思ヒマスガ一寸出来マセン、定理3カラスグ出セル

様ニ思ッテヤッテ見タノダガ出來マセンデシタ、御教示ノ程願ヒマス。

尤モ f_1, f_2 ヲニツノ characteristic functions デアル interval デ $f_1 = f_2$ デ而モ identically ニハ等シクナイトシ、且ツ一方ノ distribution ノ spectrum ガ bounded above (below) ナル如キ一對ノ f_1, f_2 ガアレバ定理3カラ容易ニ証明出来マス。斯様ナモノガ一寸見當ラナカッタノデ失敗シマシタ。

片一方ノ distribution ノ spectrum ニ関スル條件ガ要求サレナケレバ、コノヤウナモノハ容易ニ作レマス。

例ヘバ Gnedenko (Sur les functions caracteristiques, Bull. Moscow, t. 1).

又、両方ノ distribution ガ共ニ bounded (below) ナラバコノヤウナ f_1, f_2 ハ存在シマセン。