865. モヂュラー体ノ二次ノFull linear群ノテンソル表現

中山　正（阪大）

1. ハジメニ標數0ノ時ヲ一寸復習：

標數0ノ体ノ上ノFull linear群ノテンソル表現ソノ既約成分等々ハヨク知ラレテヰル。スナハチ既約成分トイハユルdiagramトノ間ニ對應ガアリ云々……デアル。

シカモ二次ノFull linear群ノ場合ハ特ニ簡單デアル。ソレハ結局一行又ハ二行ノdiagramノミ考ヘレバヨイノデアリ、モシdeterminantガ因子ニナッテ來ルノヲ度外視スレバ二行ノ場合ハ始メノ若干ノ列ヲトリノゾイテ良イコトニナリessentiallyニハ一行ノdiagramニ對應スルモノ、即チ單ニ二ツノ變數x, yノアル次數ノ齊次式ノナス、表現加群デ出來ル表現ノミデ事足リルコトニナル。

シタガッテ二ツノソノヤウナ表現ノくろねっかー積ノ展開モ簡單デアル。コレラノコトヲキレイナ形ニ書キ表ハシタノガ結局所謂Clebsch-gordanノExpansion

デアル（Weyl，群論ト量子力學ニ詳論シテアッタト記憶シマス）．スナハチ x, y ヲ

$$(x, y) \longrightarrow (x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ナル変換トスル．シカルトキ r 次齊次式ノナス加群

$$\{x^r, x^{r-1}y, \ldots\ldots, xy^{r-1}, y^r\}$$

デ定義サレタ表現ヲ Δ_r トカク。シカラバイカナル r ニツイテモコレハ既約，更ニコレニ行列式 $D = ad - bc$ ノ巾ヲカケタモノ $D^s \cdot \Delta_r$ モ既約．シカシテイカナルテンソル表現モカヽル既約成分ニ完全分解サレル。

然モ

$$\Delta_r \times \Delta_t = \begin{pmatrix} \Delta_{r+t} & & & 0 \\ & D\cdot\Delta_{r+t-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D^{\frac{r+t-|r-t|}{2}}\cdot\Delta_{|r-t|} \end{pmatrix}$$

2. サテ次ニ標數 p ($\neq 0$) ノ場合ノ Full linear 群ノ表現トナルト、ドウモ五里霧中デアリマス。（勿論 p 次ヨリヒクイ次数ノテンソル表現ノミ考ヘレバ、標數 0 ノトコロト全ク parallel デアルナドトイフ注意ハ餘リニモ trivial デアル）．実際若シコレガ解レバ随分良イワケデセウガ！

コノ場合二ツノ行キ方ガ考ヘラレルノデハナイカト思フ、即チ一ツハ有限体トシテ有限群ト考ヘ、ソノもぢゆら一表現ト考ヘルコト、次ニハソウデナク何シカ標數 0 ノトキヲ

modify（勿論一寸位ノ modification デハ駄目デセウガ）シタリシテ見ル事。

然シ、イヅレニシテモ一般論ハナカナカ手ガツキソウニナイ。ソレデハ低次，二次トカ三次トカノ場合ハ？ 現ニ R. Brauer ノ所ノ弟子ガコノ場合ヲヤッテヰルト聞イテ居マス、行キ方ハ第一ノ方、スナハチ有限群的ヤリ方ラシイデス。

コヽデハ，二次（binary）ノ場合ダケヲ考ヘ、コノ場合ニハ標数 0 ノ場合、スナハチ Clebsch-gordan 展開デ云ヒ表ハサレテヰル現論ヲ少シ modify スルコトニヨッテ解決サレルコトヲ示シタイト思ヒマス。二次ノ場合ハ全ク旨ク行クノデス。實ハ旨ク行キスギルノデス。 然シソノ modification ト云フノハ勿論 essentially ニ標數 p ガキイテ來ルソレデアリマスシ，トモカク Clebsch-gordan ト名前マデツイタ定理デスカラ、ソレガ標數 p デドウナルカヲ見ルノモ一興ト思ヒマス。マタ幾分デモ一般論ヘノ示唆ガ見出サレルナラ幸甚デス。（実ハ旨ク行キスギテヰルノデ却ッテソノ為ニハコマルノデス）。

3. 簡單ノタメ標數 p ノ素体ヲ代數的ニ閉ヂタ体デ考ヘルコトニシマス。ハジメニ若干ノ既約表現ヲツクリマス。

先ヅ，$r=0,1,2,\cdots\cdots,p-1$ ニ對シテハ

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \cdots\cdots,\ \Delta_{p-1}$$

上ト同ジニツクレバ既約，シカモ $p-1$ 或ヒハソレヨリ低イ次數ノテンソル表現ハ完全可約デ，コレラノ既約表現ニ適

當ニ $D=ad-bc$ ノ巾ヲカケタモノニ分レルコトハ明カ。（コンマデハ高々 $(p-1)!$ ヲ考ヘレバヨイノデ標數 p ハキイテ來マセン。

更ニ、アル數ヲソノ p^i 乘ニウツスノハ我々ノ体ノ Automorphism デアリマス。コレデアル表現 $\triangle$ カラ得ヲレル表現ヲ

$$\triangle^{(i)}$$

デアラハス事ニスル。

ソコデ、今任意ノ自然數 m ガ與ヘラレタトキ，次ノ如リシテ m 次ノ表現ヲツクル。

$$m=t_0+t_1 p+t_2 p^2+\cdots\cdots+t_s p^s$$

$(0\leqq t_i\leqq p-1)$ トシ

$$\Gamma_m=\triangle_{t_0}\times\triangle^{(1)}_{t_1}\times\triangle^{(2)}_{t_2}\times\cdots\cdots\times\triangle^{(s)}_{t_s}$$

トオリ、積ハくろねーかー、（シタガッテ $m\leqq p-1$ ナラ $\Gamma_m=\triangle_m$）．コレガ序 m 次ノテンソル表現ノ事ハ明。

$\boxed{\text{定 理}}$ Γ_m ハ既約デアル。

ホトンド明デアルガ、トモカリ m ヨリ低イトコロデハ定理ガ成立ツト假定スル、表現 Γ_m ノ行ノ數ヲ g トシタトキ、ソノ g^2 個ノ元（ソレラハミナ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ノ a, b, c, d ノ m 次ノ齊次式ダガ）ガ一次独立ノコトヲ云ヘバヨイ.（Burnside）．ソノタメ Γ_m ノ最後ノ因子

$\Delta_{t_s}^{(s)}$ ノ元ヲ考ヘルニ，ソレハミナ a, b, c, d ノ齊 t_s 次式ノ p^s 乘、スナハチ $a^{p^s}, b^{p^s}, c^{p^s}, d^{p^s}$ ノ齊 t_s 次式デアル、ソレヲ今

$$f_{\mu\nu}(a^{p^s}, b^{p^s}, c^{p^s}, d^{p^s}); \quad \mu, \nu = 0, \cdots\cdots t_s$$

トスル．シカルニ他方 他ノ部分

$$\Delta_{t_0} \times \cdots\cdots \times \Delta_{t_{s-1}}^{(s-1)}$$

ノ元ヲ考ヘルト，ソレハ a, b, c, d ノ $t_0 + \cdots\cdots + p^{s-1} t_{s-1}$ $(< p^s)$ 次ノ齊次式デアル．ソレヲ $g_{\rho\sigma}(a, b, c, d)$ トシヨウ．シカラバ Γ_m 自身ノ元ハ

$$f_{\mu\nu}\, g_{\rho\sigma}$$

デアル．若シコレラノ間ニ一次関係ガアレバ次數ヲ考ヘルコトニヨッテ各 $f_{\mu\nu}$ ノ係數ナル所ノ $g_{\rho\sigma}$ ノ linear combination ガミナ 0 デナケレバナラヌ．シカルニ吾々ノ假定デソレハソノ係數ガミナ 0 ノトキノミデアル。

ヨッテ Γ_m ハ既約。

實ハコウシタ Γ_m ダケデ足リルノデアル。

4. ソノタメニ、以上デハ $\Delta_1, \cdots\cdots, \Delta_{p-1}$ マデヲ考ヘタガ、Δ_p ハドンナデアラウカヲ見ル。ソノ表現加群ハ $n = \{x^p, x^{p-1}y, \cdots\cdots, xy^{p-1}, y^p\}$ デアル、ヨッテ直チニ

$$m = \{x^p, y^p\}$$

ナル認容部分群ヲ持ッテヰルコトガワカル。ソレデハ n/m ナル剰餘群ノ構造ハ？ ソレハ既約デアル。何トナラバ、ソノ表現ニ出テ來ル $(p-1)^2$ 個ノ元ハ $a^{\mu}c^{\nu}b^{\rho}d^{\tau}$ ($\mu+\nu+\rho+\tau=p$; $\mu+\rho$; $\nu+\tau$ ノドレモ p デナイ) ノ一次結合デアルガ、ソノ一ツ即チ上記ノ項ハ

$$(ax+by)^{\mu+\rho}(cx+dy)^{\nu+\tau}$$

ノ中ノ $x^{\mu+\nu}y^{\rho+\tau}$ ノ係數トシテ實際ニ出テ來(コヽデ掛ッテヰル常數ハ 0 デナイ) シカモソコニダケ出テ來ルノデアル。

ヨッテ $(p-1)^2$ 個ノ有式ガ一次独立。

サテ、コヽマデハ万事何モ binary デナクトモ良イノデアッタ、所ガ binary デナイト、コノ既約ナ n/m ニヨル表現ノ解釈ニクルシムノデアル!! 然ルニ binary ダトコノ表現カラ旨ク $D=ad-bc$ ガクヽリ出セル、スナハチ $a=b$, $c=d$ トオケバ $(ax+by)^i(cx+dy)^{p-i}$ ハ単ニ $(ax+by)^p=a^px^p+b^py^p$ トナッテ m ノ中ニフクマレル．ヨッテ D ガ n/m ノ表現カラクヽリ出セテ、残ルハ $p-2$ 次有次表現!! シカモソレガ Δ_{p-2} ナルコトハ見易イ。他方 m デノ表現ハ $\Delta_1^{(1)}$ ニ他ナラヌ．スナハチ．

$$\boxed{\Delta_p=\begin{pmatrix} D\cdot\Delta_{p-2} & 0 \\ * & \Delta_1^{(1)} \end{pmatrix}}$$

5. 次ニ $\Delta_r \times \Delta_t$. コレニツイテハ標數 0 ノトキト全然同ジ論法デ同ジ形ノ分解ガ證明サレル、タダシ左下部ノ 0 ヲ $*$ デオキカヘナケレバナラヌ、（完全分解デナイ）、シカモ分解ノ成分 $D^{\cdots}\cdot\Delta_{\cdots\cdot}$ ガ既約デナイ所ガ本質的ニコトナルワケデアル。兎モ角

$$\Delta_r \times \Delta_t = \begin{pmatrix} \Delta_{r+t} & & 0 \\ & D\cdot\Delta_{r+t-2} & \\ * & & \ddots \end{pmatrix}$$

證明ノヤリ方ハ先ヅ

$$\Delta_r \times \Delta_t = \begin{pmatrix} \Delta_{r+t} & 0 \\ * & D\cdot\Delta_{r-1} \times \Delta_{t-1} \end{pmatrix}$$

ヲイヘバヨイ。ソレニハ Δ_r, Δ_t ノ表現加群トシテ

$$\{x^r, x^{r-1}y, \cdots\cdots, y^r\},$$
$$\{\xi^t, \xi^{t-1}\eta, \cdots\cdots, \eta^t\}$$

ヲトリ、ソノ直積ニオイテ、$x=\xi$, $y=\eta$ トオイタトキ 0 ニナル元ノナス部分群ヲ考ヘルト、ソレガ $D\cdot\Delta_{r-1}\times\Delta_{t-1}$ ヲ與ヘ、他方剰餘群ガ Δ_{r+t} ヲ與ヘルノデアル。

6. コノ §4, 5 ヲツカヘバ結局

$\boxed{\text{定理}}$ イカナルテンソル表現モ §3 デ與ヘタ既約表現 $D^*\cdot\Gamma_m$ ニ分解（完全分解デハナイ）サレル。

コトガ容易ニワカル。スナハチ

$$T_m = \Delta_1 \times \cdots\cdots \times \Delta_1 \qquad (m\text{個})$$

ハ $\Gamma_m, \Gamma_{m-2}\cdot D, \Gamma_{m-4}\cdot D^2, \cdots\cdots$ ヲ成分トスル（各々

可四カアラハレル)

今定理ガmマデハ成立ツトスル。シカシテΓ_{m+1}ヲ考ヘル。然ラバ結局$\Delta_1\times\Gamma_m$, $\Delta_1\times\Gamma_{m-2}\cdot D$, …… ヲ考ヘレバヨイ。然シ二番目以下ハ結局低イ所ニ reduce サレルカラ、$\Delta_1\times\Gamma_m$ヲ考ヘレバヨイ。

ソノタメ再ビ

$$m=t_0+t_1p+\cdots\cdots+t_sp^s \qquad (0\leqq t_i\leqq p-1)$$

トスル。

1) $t_0+1\leqq p-1$. シカラバ$t_0\geqq 1$ 又ハ $t_0=0$ ニ従ヒ

$$\Delta_1\times\Delta_{t_0}=\begin{pmatrix}\Delta_{t_0+1} & 0\\ * & \Delta_{t_0-1}\cdot D\end{pmatrix} \quad \text{又ハ} \quad \Delta_1$$

ヨッテ, Γ_mノ定義ヲ想起スレバ容易ニ

$$\Delta_1\times\Gamma_m=\begin{pmatrix}\Gamma_{m+1} & 0\\ * & \Gamma_{m-1}\cdot D\end{pmatrix} \quad \text{又ハ} \quad \Gamma_{m+1}$$

故ニヨロシイ。

2) $t_0+1=p$

$$\Delta_1\times\Delta_{t_0}=\Delta_1\times\Delta_{p-1}=\begin{pmatrix}\Delta_p & 0\\ * & \Delta_{p-2}\cdot D\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}D\cdot\Delta_{p-2} & & 0\\ & \Delta_1^{(1)} & \\ * & & D\cdot\Delta_{p-2}\end{pmatrix}$$

ヨッテ

$$\Delta_1\times\Gamma_m=\begin{pmatrix}\Gamma_{m-1}\cdot D & & 0\\ & \Delta_{t_s}^{(s)}\times\cdots\cdots\times\Delta_{t_1}^{(1)}\times\Delta_1^{(1)} & \\ * & & \Gamma_{m-1}\cdot D\end{pmatrix}$$

シカルニ

$$\Delta_{t_s}^{(s)}\times\cdots\cdots\times\Delta_{t_1}^{(1)}\times\Delta_1^{(1)}$$
$$=\left(\Delta_{t_s}^{(s-1)}\times\cdots\cdots\times\Delta_{t_1}^{(0)}\times\Delta_1^{(0)}\right)^{(1)}$$

デ且ツ

$$\Delta_{t_1}^{(0)}\times\Delta_1^{(0)}=\Delta_{t_1}\times\Delta_1=\begin{pmatrix}\Delta_{t_1+1} & 0\\ * & \Delta_{t_1-1}\cdot D\end{pmatrix}\ \text{又ハ}\ \Delta_1$$

($t_1\geqq 1$ or $t_1=0$ ニ從ツテ). ヨッテモシ $t_1+1\leqq p-1$ ナラ

$$\Delta_{t_s}^{(s)}\times\cdots\cdots\times\Delta_{t_1}^{(1)}\times\Delta_1^{(1)}=\begin{pmatrix}\Gamma_{m+1}, & 0\\ * & \Gamma_{m-2p+1}\cdot D^p\end{pmatrix}$$
$$\text{又ハ}\ \Gamma_{m+1}$$

トナッテヨイ。モシコヽデ $t_1+1=p$ ナラ同ジヤウナ reduction ヲ繰リ返セバヨイ。

結局定理ガ証明サレル。(コノ辺細イ計算ガ或ヒハ一寸位間違ッテキルカモ知レマセンガ、要スルニ大体ヨイト思ヒマス)。ナホ Γ_m ノ中ニ上記ノ成分ガ何回アルカ。又, ドンナ順序デアルカ (少クトモアラハレルソノ一ツノ順序) 等モ上ノ計算カラシラベテ見レバワカル筈デスガ、面倒デスカラヤメマセウ。更ニ $\Delta_r\times\Delta_t$ 又ハ $\Gamma_m\times\Gamma_n$ ノ既約成分ノ分解、(Clebsch-Gordan ノ定理ノ代用トシテ) ヲシラベルコトモ容易デアルワケデス。

7. 上ニオイテ、分解ハイツモ完全トハカギラヌカラ $*$ ヲカイテオキマシタ。シカシ, 実際ニ $*$ デアッテ必ズシモ 0

デナイデセウカ？　答ハ肯定的，タトヘバ，標数2トシタトキ

$$\Delta_1 \times \Delta_1$$

ガスデニ完全可約デナイ，ソレヲ見ルニハ標数2ノ素体ノ Full linear 群ト考ヘテヨイ．ソレハ6個ノ元

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ヨリナル．今コレノくろねっかー自乗

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \text{--------}$$

ヲツクリ、ソレヲ全部加ヘ合セルト

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ナル行列、トモカク $\neq 0$ デアル。シカルニ6個ノ元ヲ全部加ヘタモノハ、タシカニコノ有限群ノ群環ノ radical ニフクマレル．（標数2）．ヨッテコノくろねっかー自乗ハ完全可約デナイ。即チ一般ニ二ツノ完全可約ノ表現ノくろねっかー積必ズシモ完全可約デナイ。最近モ正田先生ト話シタノデスガ、くろねっかー積トイフモノハ甚ダ便利ナ代リマタ正体ノワカラナイモノデアリマス。ナホ、更ニヒネクレテ、完全可約デナイ表現ノくろねっかー積ガ完全可約デアルコトナドアルダラウカ？