# 866. 確率法則ノ分解ニ就テ

河田　龍夫 (仙台高工)

第197号デ同題ノ下ニ次ノ定理ヲ証明シマシタ。

<u>定理1.</u> Chance var. $X$ ノ distribution function ヲ $\sigma(x)$ トスル。若シアル常数 $a\ (a>0)$ ニ對シテ $u\to+\infty$ ノトキ

$$(1)\quad \sigma(-u+a)-\sigma(-u-a)=O(e^{-\theta(u)})$$

デアルトスル。コヽニ $\theta(u)$ ハ $u>0$ デ定義サレタ正増加函數デ

$$(2)\quad \int_1^\infty \frac{\theta(u)}{u^2}\,du=\infty$$

トスル。ソウスルト $X$ ノ一ツノ chance variable ニヨリ division ハ unique デアル。

コノ定理デ (2) ノ條件ハ是以上弛メルコトハ不可能デアロウト述ベテオキマシタ。

サテ前号デ characteristic function ノ non-vanishing トイフ表題ノ下ニ次ノ定理ヲ証明シマシタ。

<u>定理2.</u> $\theta(u)$ ヲ $u>0$ デ定義サレタ正増加函數デ

$$(3)\quad \int_1^\infty \frac{\theta(u)}{u^2}\,du<\infty$$

トスル。ソウスルト distribution $\sigma(u)$ ガ (1) ヲ滿足サセ (任意ノ $a$ ニ対シテ) 且ツソノ characteristic function $\Lambda(t)$ ガ $(-l,\,l)$ ノ外デ $0$ ニナル如キ $\sigma(u)$

ガ存在スル。

コヽニ $l$ ハ任意ノ正数.

ソノ時、コノ定理カラ定理 1 ノ (2) ガ弛メラレナイコトヲ証明スル方針ダッタノガ失敗シタト申シマシタ。

併シ定理 2 ノ証明カラ容易ニ (2) ノ弛メラレナイコトガ証明出来マス。コレヲ注意スルノガ本談話ノ目的ナノデス、即チ次ノ結果ガ得ラレマス。

<u>定理 3.</u> $\theta(u)$ ヲ定理 2 ニ於ケル函数トスル。ソウスルトーツノ chance variable $X$ ガ存在シテソノ distribution ヲ $\sigma(u)$ トスルト是ガ (1) ヲ満足サセ、而モ $X = X_1 + X_2 = X_1 + X_3$ ガ成立スル。

コヽニ $P_r(X_2 \neq X_3) > 0$. (即チ $X$, $X_1$ ニヨリ division ハ unique デナイ)。

定理 2 ノ証明ニヨレバ ($l = \frac{\pi}{2}$ トスル) $|u| > \frac{\pi}{2}$ デ $0$ ニナル適當ナ $F(u)$ ヲトリ

$$\Lambda(t) = \lambda(t)/\lambda(0), \quad \lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) F(x+t)\, dx$$

トスレバ $\Lambda(t) = 0$, $|t| > \pi$ トナリ之レハーツノ distribution $\sigma(u)$ ノ characteristic function トナル. 且ツ $\sigma(u)$ ハ (1) ヲ満足サセル。($\theta(u)$ ハ定理 3 ノ文句中ノ $\theta(u)$).

サテ $$\lambda(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) F(x+t)\, dx$$

トナル。 $M(t) = \Lambda(t) \quad (|t| \leqq \pi)$

トシ且ツソノ他デハ $2\pi$ ヲ period トスル periodic function トスル。

$M(t)$ ガ連続ナルコトハ容易ニ verify 出来ル。

$(\because\ \Lambda(\pi)=\Lambda(-\pi)=0)$

サテ $M(t)$ ノ Fourier series ヲ作ルソノ Fourier coeff ハ

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}M(t)\,e^{-int}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-int}\,dt\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\,F(x+t)\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\,e^{inx}\,dx\int_{-\pi}^{\pi}F(x+t)\,e^{-i(x+t)n}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\,e^{inx}\,dx\int_{-\pi+x}^{\pi+x}F(t)\,e^{-int}\,dt$$

然ルニ $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$，故ニ $\pi+x\geqq\frac{\pi}{2}$，$-\pi+x\leqq-\frac{\pi}{2}$

$F(t)=0\ \ (t>\frac{\pi}{2})$．随テ

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}F(x)\,e^{inx}\,dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(t)\,e^{-int}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\,e^{inx}\,dx\right|^2\geqq 0$$

即チ $M(t)$ ノ Fourier coeff. ハ non-negative デアル。

而モ明カニ $\sum_{-\infty}^{\infty}a_n<\infty$．故ニ

$$M(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \qquad a_n \geqq 0$$

トナリ $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = M(0) = 1$ デアル. 故ニ $M(t)$ ハ $n$ ヲ spectrum トシ、ソノ点ニオケル jump ガ $a_n$ デアル如キ distribution ノ characteristic function デアル. 又 $M(t)$ ガ $\Lambda(t)$ ニ identically equal デナイコトハ定義カラ勿論ノコトデアル。サテ

$$\Lambda^2(t)=\Lambda(t)M(t)$$

デアルカラ $\Lambda(t)$, $M(t)$ ヲ characteristic function トスル chance variables ヲ夫々 $X_1$, $X_2$ トシ $X_1+X_1=X$ トスレバ ($X_1$ ト $X_1$ ハ indep. トス)

$$X=X_1+X_1=X_1+X_2. \qquad (P_r(X_1 \neq X_2)>0).$$

トナリ、$X$ ノ distribution ヲ $\tau(u)$ トスレバ

$$\tau(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(u-t)\,d\sigma_1(t)$$

($\sigma_1(t)$ ハ $M(t)$ ノ distribution)

$$\tau(-u+a)-\tau(-u-a)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\sigma(-u-n+a)-\sigma(-u-n-a))$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-[\frac{u}{2}+1]}+\sum_{n=-[\frac{u}{2}+1]+1}^{\infty}$$

サテ $0<a<1$ ト假定スルコトガ出来ル、ソウスルト

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\sigma(-u-n+a)-\sigma(-u-n-a))\leqq 1$$

デドノ作成カラ $a_n = O(e^{-2\theta(|n|)})$

故ニ容易ニ

$$\tau(-u+a) - \tau(-u-a) = O\left(e^{-\theta\left(\frac{u}{2}\right)}\right).$$

ガ得ラレル。

始メカラ $\theta$ トシテ $\theta(2u)$ ヲトッテオケバ $\tau$ ハ (1) ヲ満足サセル。

是デ吾々ノ目的ガ完全ニ達セラレタ。