867. Idealtheorie ニ就イテ

松下　嘉米男（東大學生）

Integritätsbereich ニ於テ Ideal ニ関スル Teilerkettensatz ガ eingeschränkter Viel-fashenkettensatz ヨリ出ルコトハ森、秋月氏等ノ研究ニヨリ既ニ知ラレテ居ル。又 C. Hopkins ガ (einseitiges-Ideal ニ対スル) Minimalbedingung ヲ有スル (nicht kommutativer) Ring ニ於テハ Radikal ガ nilpotent ナルコトヲ証シ、之レヲ用ヒテ浅野氏ハ nicht kommutativer Ring ニ於テ簡單ニ Linksideale ニ對スル Teilerkettensatz ヲ Vielfachenkettensatz ヨリ出シタ。之レヨリ直チニ kommutative ナ場合ニ於テハ Teilerkettensatz ガ eingeschränkter Vielfachenkettensatz ヨリ出ルコトガワカル。

サテ普通 Integritätsbereich ニ於ケル Idealtheorie ハ次ノ三ツノ條件ノ下ニ論ゼラレル。

1. Ideale ニ對スル Teilerkettensatz ガ成立スル。
2. Primideal ハ teilerlos ナリ。
3. Quotienkörper ニ於テ ganz abgeschlossen ナリ。

然ルニ 1, 2 ハ eingeschrankter vielfashen

kettensatz ヨリ出ル以上 1.2 ノ代リニ eingeschränkter Vielfashenkettensatz ヲ以テシテモ Idealtheorie ハ同様ニ論ジラレルワケデアル
ソコデ eingeschränkter Vielfashenkettensatz ヨリ一度 Teilerkettensatz ヲ出スコトヲセズ直接ニ Idealtheorie ヲ論ジル問題ガアル。コレヲ次ノ様ニヤッテ見マシタ。

$\mathfrak{Y}$ ヲ次ノ條件ヲ有スル Integritätsbereich トス。

I. Ideal ニ対スル eingeschränkter Vielfachenkettensatz ガ成立スル。

II Quotienkörper ニ於テ ganz abgeschlossen ナリ。

ソウスルト $\mathfrak{Y}$ ニ於ケル Ideal ハ Primidealzerlegung ガ出来且ツソノ Primideal ノ順序ヲ問題ニシナケレバ Zerlegung ハ eindeutig ナリ。之ヲ順ヲ追ッテ証明シマス。尚 Einheitsideal Nullideal ハ Primideal ノ中ニ入レナイデオク。

先ヅ $\mathfrak{Y}$ ハ II ニヨリ Einselement ヲ含ミ、I ニヨリソノ Ideal ハ prim ナルトキニ限リ teilerlos ナリ。以下一般ノ Ideal ヲ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots\ldots$, Primideal ヲ $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \ldots\ldots$ ト記ス。

定理1. $\mathfrak{Y}$ ニ於テ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム Primideal ト $\bar{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{Y}/\mathfrak{a}$ ニ於ケル Primideal ハ 1:1 ニ對應スル。又

$\mathfrak{y} \sim \overline{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\mathfrak{y}$ ノ $\mathfrak{a}$ ヲ含マナイ Primideal ハ $\overline{\mathfrak{y}}$ ニ對應シ、逆ニ $\overline{\mathfrak{y}}$ ニ對應スル $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ハ $\mathfrak{a}$ ヲ含マナイ。但シコヽニ $\mathfrak{a}$ ハ prim デハナイトスル。

證明． $\mathfrak{y} \sim \overline{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\mathfrak{a}$ ニ於テ $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{y}$ ノ Primideal.
$\mathfrak{p} \to \overline{\mathfrak{p}}$ トスルト $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ ナラバ $\mathfrak{y} \supset \mathfrak{p} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})$ デ $\overline{\mathfrak{y}} \supset \overline{\mathfrak{p}}$ トナリ、又 $\overline{\mathfrak{p}}$ ガ $\overline{\mathfrak{y}}$ デ Primideal ヲナス八明カナリ。

$\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{a}$， $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ トスルト $\mathfrak{y} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ トナリ $\overline{\mathfrak{y}} = (\overline{\mathfrak{p}}, \overline{\mathfrak{p}}')$ トナル。
従ッテ $\overline{\mathfrak{p}} \neq \overline{\mathfrak{p}}'$ ナリ．

次ニ $\overline{\mathfrak{p}}$ ヲ $\overline{\mathfrak{y}}$ ノ Primideal トシ、$\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{y} \sim \overline{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $p \to \overline{p} \in \overline{\mathfrak{p}}$ ナル $\mathfrak{y}$ ノ Element p ノ全体トスルト $1 \to \overline{1} \notin \overline{\mathfrak{p}}$ ナル故 $1 \notin \mathfrak{p}$、従ッテ $\mathfrak{y} \supset \mathfrak{p}$ ナリ。

ソコデ $\mathfrak{p}$ ガ $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ヲナス八明ラカナリ。

従ッテ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ト $\overline{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\mathfrak{a}$ ノ Primideal トハ $1:1$ ニ對應スル．

$\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}$ トスルト $\mathfrak{y} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})$ トナリ $\overline{\mathfrak{y}} = (\overline{\mathfrak{p}}, \overline{\mathfrak{a}}) = (\overline{\mathfrak{p}}, \overline{0}) = \overline{\mathfrak{p}}$ ナリ。コヽニ $\overline{0}$ ハ $\overline{\mathfrak{y}}$ ノ Null トス。逆ニ $\overline{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{y}}$ トスルト $\mathfrak{y} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})$ トナリ $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}$ ナリ。故ニ $\mathfrak{y} \sim \overline{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\mathfrak{a}$ ヲ含マナイ Primideal ハ $\overline{\mathfrak{y}}$ ニ對應シ $\overline{\mathfrak{y}}$ ニ對應スル $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ハ $\mathfrak{a}$ 含マナイ。

—— 證明終リ ——

次ニ $\mathfrak{N}$ ヲ Ring $\mathfrak{o}$ ノ Radikal トシ, $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ Primideal トスルト $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{N}$ ナリ。何故ナラバ $a \in \mathfrak{N}$ トスルト $a^{\rho} = 0$, ρ ハアル自然数。$\mathfrak{o} \sim \mathfrak{o}/\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{o}}$ ニ於テ $a \rightarrow \bar{a}$ トスルト $\bar{a}^{\rho} = \bar{0}$、$\bar{\mathfrak{o}}$ ハ Integritätsbereich ナル故ニ、$\bar{a} = \bar{0}$ ナリ。即チ $a \in \mathfrak{p}$, 従ッテ $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{p}$ ナリ。

ソコデ $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{y}$ ノ Prim デナイ Ideal トシ $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\mathfrak{a}$ ノ Radikal ヲ $\bar{\mathfrak{v}}$ トスルト $\bar{\mathfrak{y}}/\bar{\mathfrak{v}}$ ハ I ニヨリ Ideal ニ対スル Minimalbedingung ヲ有スルモ halbeinfacher Ring ナリ。従ッテ $\bar{\mathfrak{y}}/\bar{\mathfrak{v}}$ ハ有限個ノ minimales Ideal ノ直和ニナル。

$$\bar{\bar{\mathfrak{y}}} = \bar{\mathfrak{y}}/\bar{\mathfrak{v}} = \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_1 + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_2 + \cdots + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_2,$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_i : \text{minimales Ideal.}$$

ソウスルト $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i = \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_1 + \cdots + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_{i-1} + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_{i+1} + \cdots + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_r$, $i = 1, 2, \ldots, r$ ノ r 個ハ teilerloses Ideal ナリ。即チ $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i$ ハ $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ノ Primideal ナリ。尚コノ外ニ $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ノ Primideal ノナイコトハ明ラカナリ。依ッテ $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ニ於ケル Primideal ハ r 個アッテ之レ以上ハナイ。従ッテ前定理ニヨリ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\bar{\mathfrak{N}}$ ヲ含ム Primideal ハ丁度 r 個存在スル。所ガ $\bar{\mathfrak{N}}$ ハ $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Radikal ナル故 $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Primideal ハスベテ $\bar{\mathfrak{N}}$ ヲ含ム。故ニ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ於ケル Primideal ハ丁度 r 個ダケ存在スル。之レヲ $\mathfrak{y}$ ニ於テ考ヘルト

定理2. $\mathfrak{y}$ ニ於テ任意ノ Ideal ヲ含ム Primideal

ハ常ニ存在シ且ツソノ數ハ有限ナリ。

尚コノ Ideal ガ Primideal ナル時ニモ之ガ成立スルハ明カナリ。

$\mathfrak{o}$ ノ Quotientenkörper K ニ於テ $\mathfrak{p}^{-1}$ ヲ $\alpha\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{o}$ ナル α ノ全体トスルト之ハ $\mathfrak{o}$ ノ gebrochenes Ideal ヲナス。

定理3. $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{o}$ ノ Primideal (ganz) トスルト
$\mathfrak{p}^{-1} \supset \mathfrak{o}$ ナリ。

証明. $\mathfrak{o}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ ナル故ニ $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}^{-1}$ ハ明ラカナリ。

今 $a \in \mathfrak{p}$ トスルト $(a) \subseteq \mathfrak{p}$ ナリ。

ソコデ $(a) = \mathfrak{p}$ トスルト $\frac{1}{a} \in \mathfrak{p}^{-1}$, $\frac{1}{a} \neq$ ganz ナリ。
何故ナラバ $\frac{1}{a} = b =$ ganz トスルト $a \in \mathfrak{p}$ ナル故 $1 = ab \in \mathfrak{p}$, 即チ $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ トナリ $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{p}$ ニ反ス。故ニ $\frac{1}{a} \neq$ ganz. 従ツテコノトキハ $\mathfrak{p}^{-1} \supset \mathfrak{o}$ ナリ。

次ニ $(a) \subset \mathfrak{p}$ トスル。
$\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/(a)$ ノ Radikal ヲ $\bar{\mathfrak{n}}$ トスルト

$$\bar{\bar{\mathfrak{o}}} = \bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{n}} = \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_1 + \cdots + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_r,$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_i: \text{minimales Ideal}$$

トナリ $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ ノ Primideal ハ $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i = \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_1 + \cdots + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_{i-1} + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_{i+1} + \cdots + \bar{\bar{\mathfrak{l}}}_r$, $(i = 1, 2, \cdots, r)$ ナリ。$\mathfrak{o} \sim \bar{\mathfrak{o}} \sim \bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ ニ於テ $\mathfrak{p} \sim \bar{\mathfrak{p}} \sim \bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ トスルト $\mathfrak{p} \supset (a)$ ナル故 $\bar{\mathfrak{p}}$ ハ $\bar{\mathfrak{o}}$ ノ Primideal.

従ツテ $\bar{\mathfrak{p}} \supseteq \bar{\mathfrak{n}}$, 従ツテ $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ ハ $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ ノ Primideal ナリ。即チ $\mathfrak{p}$ ハ $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ ノ一ツノ Primideal ニ對應スル。例ヘバ

$\mathfrak{J}\sim\bar{\bar{\mathfrak{J}}}_i$ トスル。$\bar{\mathfrak{J}}_i\,\bar{\mathfrak{l}}_i=\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ ナル故ニ $\mathfrak{y}\sim\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ニ於テ $\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_i$ ニ對應スル $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Element 全体ヲ $\bar{\mathfrak{l}}$ トスルト明ラカニ $\bar{\mathfrak{l}}\supset\bar{\mathfrak{w}}\geq\bar{\mathfrak{o}}$ ニシテ $\bar{\mathfrak{J}}\bar{\mathfrak{l}}\leq\bar{\mathfrak{w}}$ ナリ。ココニ $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}$ ハ $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ノ Null. $\bar{\mathfrak{o}}$ ハ $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Null トス。サテ Ideal ニ對シテ Minimalbedingung ヲ有スル Ring ニアリテハ Radikal ハ nilpotent ナリ。(C. Hopkins. Duke. Math. 4)

從ッテ $\bar{\mathfrak{w}}\supseteq\bar{\mathfrak{J}}\bar{\mathfrak{l}}$ ナル故ニアル自然数 ν ニ對シテ $\bar{\mathfrak{J}}^{\nu}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu}=\bar{\mathfrak{o}}$ トナル。又 $\bar{\mathfrak{l}}\supset\bar{\mathfrak{w}}$ ナル故 $\bar{\mathfrak{l}}^{M}\neq\bar{\mathfrak{o}}$ ($M=1,2,\cdots\cdots$) ナリ。ソコデ $\bar{\mathfrak{J}}^{j}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu}=\bar{\mathfrak{o}}$ トナル j ノ最小ノ自然数ヲ λ トスルト $\bar{\mathfrak{J}}^{\lambda}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu}=\bar{\mathfrak{o}}$, $\bar{\mathfrak{J}}^{\lambda-1}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu}\neq\bar{\mathfrak{o}}$ ナリ。
$\bar{\mathfrak{a}}=\bar{\mathfrak{J}}^{\lambda-1}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu}$ トスルト $\bar{\mathfrak{J}}\bar{\mathfrak{a}}=\bar{\mathfrak{o}}$, 之レヲ $\mathfrak{y}$ ニ於ケル関係ニ直スト $\mathfrak{J}\mathfrak{a}\leq(a)$ ナリ。ココニ $\mathfrak{a}$ ハ $\mathfrak{y}\sim\bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\bar{\mathfrak{a}}$ ノ Element ニ對應スル $\mathfrak{y}$ ノ Element 全体ナリトス。ソウスルト $\bar{\mathfrak{a}}\supset\bar{\mathfrak{o}}$ ナル故ニ $\mathfrak{a}\supset(a)$ ナリ。從テ $c\mathfrak{J}\leq(a)$, $c\notin(a)$ $c\in\mathfrak{a}$, ナル c ガ存在スル。依テ $\frac{c}{a}\mathfrak{J}\leq\mathfrak{y}$, $\frac{c}{a}$ + ganz ナリ。故ニ $\mathfrak{J}^{-1}\supset\mathfrak{y}$ ナリ。

—— 証終 —

ソウスルト $\mathfrak{J}^{-1}\supset\mathfrak{y}\ni 1$ ナル故 $\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{J}\leq\mathfrak{y}$ ナリ。$\mathfrak{J}$ ハ teilerlos ナル故ニ $\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{J}=\mathfrak{J}$ カ若シクハ $\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{J}=\mathfrak{y}$ ナリ。$\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{J}=\mathfrak{J}$ トスルト $(\mathfrak{J}^{-1})^{\nu}\mathfrak{J}=\mathfrak{J}$, $\nu=1,2,\cdots\cdots$, $p\in\mathfrak{J}$, $p'\in\mathfrak{J}^{-1}$ トスルト $p'^{\nu}p\in\mathfrak{J}\subset\mathfrak{y}$, $\nu=1,2,\cdots\cdots$ 從ッテ II ニヨリ $p'\in\mathfrak{y}$. 即チ $\mathfrak{J}^{-1}\leq\mathfrak{y}$ ナリ。之 $\mathfrak{J}^{-1}\supset\mathfrak{y}$ ニ反ス。從ッテ

定理4. $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}=\mathfrak{o}$ ナリ。

之レヨリ任意ノ自然数 m ニ對シ $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{p}^{m+1}$ ナルコトガワカル。ソレハ $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}^{m+1}$ ナル故，今 $\mathfrak{p}^m=\mathfrak{p}^{m+1}$ トスルト $\mathfrak{p}^m(\mathfrak{p}^{-1})^m=\mathfrak{p}^{m+1}(\mathfrak{p}^{-1})^m$. 即チ $\mathfrak{o}=\mathfrak{p}$ トナリ、$\mathfrak{o}\supset\mathfrak{p}$ ニ反ス。故ニ $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{p}^{m+1}$ ナリ。同様ニシテ $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_r$ ヲ Primideal, $m_1, m_2,\cdots\cdots,m_r$ ヲ任意ノ自然数トスルトキ $\mathfrak{p}_1^{m_1}\mathfrak{p}_2^{m_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_r^{m_r}\supset\mathfrak{p}_1^{m_1+1}\mathfrak{p}_2^{m_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_r^{m_r}$ ナルコトモ，亦 $\mathfrak{p}^m\supseteq\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{p}^{m+1}$ ナラバ $\mathfrak{p}^m=\mathfrak{a}$ ナルカ若シクハ $\mathfrak{p}^{m+1}=\mathfrak{a}$ ナルコトモ分ル。

以下 i, m, μ, ν ハ自然数ヲ表ハシ，$\mathfrak{o}\sim\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ ニ於テ $\mathfrak{o}$ ノ Primideal $\mathfrak{p}$ ト $\bar{\mathfrak{o}}$ ノ Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ トハ對應スルモノトシ，$\bar{0}$ ハ $\bar{\mathfrak{o}}$ ノ Null トス。ソウスルト

定理5. (1) $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1}\not\supset\mathfrak{a}$ トスルト $\bar{\mathfrak{p}}^m=\bar{\mathfrak{p}}^{m+i}$, $i=1,2,\cdots\cdots$

(2) $(\mathfrak{p}^m\supset)\mathfrak{p}^{m+1}\supset\mathfrak{a}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{p}}^m\supset\bar{\mathfrak{p}}^{m+1}\supset\bar{0}$ ニシテ又逆ガ成立スル。

(3) $\bar{\mathfrak{p}}^{m-1}\supset\bar{\mathfrak{p}}^m=\bar{\mathfrak{p}}^{m+1}\neq\bar{0}$ トスルト $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1}\not\supset\mathfrak{a}$ ナリ。

証明

(1) $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1}\not\supset\mathfrak{a}$ ナル故 $\mathfrak{p}^m\supseteq(\mathfrak{p}^{m+1},\mathfrak{a})\supset\mathfrak{p}^{m+1}$. 従ッテ $\mathfrak{p}^m=(\mathfrak{p}^{m+1},\mathfrak{a})$ ナリ。

依ッテ $\mathfrak{p}^{m+1}=(\mathfrak{p}^{m+2},\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ ニシテ。

$\mathfrak{p}^m=(\mathfrak{p}^{m+2},\mathfrak{a}\mathfrak{p},\mathfrak{a})=(\mathfrak{p}^{m+2},\mathfrak{a})$ ナリ。

同様ニシテ $\mathfrak{p}^m = (\mathfrak{p}^{m+i}, \mathfrak{a})$.

故ニ $\bar{\mathfrak{p}}^m = \bar{\mathfrak{p}}^{m+i}$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$ ナリ。

(2) $\mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{p}^{m+1} \supset \mathfrak{a}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{p}}^m \supset \bar{\mathfrak{p}}^{m+1} \supset \bar{0}$ ナルコトハ明ラカナリ。

逆ニ $\bar{\mathfrak{p}}^m \supset \bar{\mathfrak{p}}^{m+1} \supset \bar{0}$ ナリトス。今 $\mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{p}^{m+1} \supset \mathfrak{a}$ ガ成立シナイトスルト $\mathfrak{p}^m \not\supset \mathfrak{a}$ カ又ハ $\mathfrak{p}^m \supseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ ナリ。今 $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{a}$ 又ハ $\mathfrak{p}^{m+1} = \mathfrak{a}$ ナルコトハ $\bar{\mathfrak{p}}^m, \bar{\mathfrak{p}}^{m+1} \supset \bar{0}$ ヨリ成立セズ。サテ (1) ニヨリ $\mathfrak{p}^m \not\supset \mathfrak{a}$ ナルトキモ $\mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ ナルトキモ $\bar{\mathfrak{p}}^m = \bar{\mathfrak{p}}^{m+1}$ トナリ $\bar{\mathfrak{p}}^m \supset \bar{\mathfrak{p}}^{m+1}$ ニ反ス。故ニ $\mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{p}^{m+1} \supset \mathfrak{a}$ ナリ。

(3) $\bar{\mathfrak{p}}^{m-1} \supset \bar{\mathfrak{p}}^m = \bar{\mathfrak{p}}^{m+1} \neq \bar{0}$ ヨリ (2) ヨリ $\mathfrak{p}^{m-1} \supset \mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{a}$, 従ッテ $\mathfrak{p}^m = (\mathfrak{p}^{m+1}, \mathfrak{a})$ ナリ。

——証終リ——

ソコデ $\mathfrak{p}^{m+1} \supset \bar{\mathfrak{p}}^m = \bar{0}$ トスルト $\mathfrak{p}^{m-1} \supset \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{p}^m$ トナリ $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^m$ トナル。$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ トスルト $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\mathfrak{a}$ ニ於テハ I ニヨリ $\bar{\mathfrak{p}} \supset \bar{\mathfrak{p}}^2 \supset \cdots\cdots \supset \bar{\mathfrak{p}}^m = \bar{\mathfrak{p}}^{m+1} = \cdots\cdots$ ナリ。

従ッテ $\bar{\mathfrak{p}}^m = \bar{0}$ トスルト $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{a}$ トナリ、$\bar{\mathfrak{p}}^m \supset 0$ トスルト $\mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ ナリ。即チ

定理 6. $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ ナルトキハ $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{a}$ ナルカ、若シクハ $\mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ トナリ、コノ m ハ eindeutig ニ定マル。

又 $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\bar{\mathfrak{p}}_1^{\nu_1} \cdots\cdots \bar{\mathfrak{p}}_r^{\nu_r} = \bar{0}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニハ $\bar{\mathfrak{p}}_1, \cdots\cdots, \bar{\mathfrak{p}}_r$ 以外ニ Primideal ハ存在シナイ。ソレハ若シ他ニ $\bar{\mathfrak{p}}$ ア

リトスルト $\bar{\mathfrak{y}} = (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{p}}_1^{\nu_1} \cdots\cdots \bar{\mathfrak{p}}_r^{\nu_r}) = (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{o}}) = \bar{\mathfrak{p}}$ トナリ $\mathfrak{y} \supset \bar{\mathfrak{p}}$ ニ反スルカラデアル。

従ッテ $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Primideal ヲ $\bar{\mathfrak{p}}_1, \cdots\cdots, \bar{\mathfrak{p}}_r$ トスルト如何ニ自然数 μ_i ヲエランデモ $\bar{\mathfrak{p}}_{\nu_1}^{\mu_1} \cdots\cdots \bar{\mathfrak{p}}_{\nu_t}^{\mu_t} \neq \bar{\mathfrak{o}}$, $1 \leq t \leq r-1$, $\nu_1, \cdots\cdots, \nu_t$ ハ $1, 2, \cdots\cdots r$ ノ中ノ t 個ノ数ノアル順列ナリ。従ッテ

定理7. $\mathfrak{a}$ ヲ含ム Primideal ヲ $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_r$ トスルトキ

自然数 μ_i ヲ如何ニトッテモ $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_{\nu_1}^{\mu_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_{\nu_t}^{\mu_t}$, $1 \leq t \leq r-1$, $\nu_1 \cdots\cdots \nu_t$ ハ $1, \cdots\cdots, r$ ノ中ノ t 個ノアル順列。

ソコデ

定理8. $\mathfrak{a}$ ヲ含ムスベテノ Primideal ヲ $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_r$ トスル。

コノトキ $r = 1$ ナラバ $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^m$ トナル。m ハアル自然数。

$r = 2$ ナラバ $\mathfrak{p}_i^{m_i} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_i^{m_i+1} \not\supset \mathfrak{a}$ トナル自然数 m_i ガ定マリ

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r}$$

ナリ。

尚コノ Zerlegung ハ eindeutig ナリ。

証明:

$\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{a}$ ナル故 $\mathfrak{p}_i^{m_i} = \mathfrak{a}$ カ又ハ $\mathfrak{p}^{m_i} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m_i+1} \not\supset \mathfrak{a}$ ノ何レカニ定マリカヽル m_i ハ一定スル。

$r = 1$ ナルトキ $\mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ トスルト

$\mathfrak{J} \supset \mathfrak{a}(\mathfrak{p}^{-1})^m$ ニシテ $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}^{-1})^m$ ハ $\mathfrak{J}$ ノ ganzes Ideal ナル故ニ $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{p}^{-1})^m \supseteq \mathfrak{a}$ ナル Primideal $\mathfrak{p}'$ ガ存在スル。$r=1$ ナル故 $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$ トナリ、$\mathfrak{p}^{m+1} \supset \mathfrak{a}$ トナル。之レ $\mathfrak{p}^{m+1} \ne \mathfrak{a}$ ニ反ス。故ニコノトキハ $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^m$ ナリ。

$r \geqq 2$ ナルトキハ $\mathfrak{p}_i^{m_i} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_i^{m_i+1} \ne \mathfrak{a}$ ナル場合ナリ。ソレハ $\mathfrak{p}_i^{m_i}=\mathfrak{a}$ トスルトモ他ニ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム Primideal ノ無イコトニナリ $r \geqq 2$ ニ反ス。

サテ $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)=\mathfrak{J}$ $(i \ne j)$ ナル故ニ

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{p}_1^{m_1} \wedge \cdots\cdots \wedge \mathfrak{p}_2^{m_r} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r}$$

ナリ。ソコデ

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r}$$

トスルト

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{p}_1^{-1})^{m_1} \cdots\cdots (\mathfrak{p}_2^{-1})^{m_r} < \mathfrak{J}$$

トナリ $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}_1^{-1})^{m_1} \cdots\cdots (\mathfrak{p}_2^{-1})^{m_r}$ ハ $\mathfrak{J}$ ノ ganzes Ideal ヲナス故ニ

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{p}_1^{-1})^{m_1} \cdots\cdots (\mathfrak{p}_r^{-1})^{m_r} \subseteq \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{J}$$

ナル Primideal $\mathfrak{p}'$ ガ存在スル。從ツテ

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}' \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r} \subseteq \mathfrak{p}'$$

トナリ、$\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_r$ ハ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム Primideal ノスベテデアルカラ

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_i$$

ナル $\mathfrak{p}_i$ ガアル。ソウスルト

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_i^{m_i+1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r} \subset \mathfrak{p}_i^{m_i+1}$$

トナリ始メノ $\mathfrak{p}_i^{m_i+1}$ 非 $\mathfrak{a}$ トシタノニ反ス。

故ニ

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r}$$

ナリ。

尚コノ Zerlegung ノ eindeutig ナルコトハ明ラカナリ。

——証終リ——

（以上）