871. Verband ノ表現

河田 敬義 (東大)

1

ヨク知ラレテヰル様ニ，任意ノ distributiver Verband (特ニ Boolscher Verband) $\mathfrak{V}$ ハ Mengenverband トシテアラハサレル。即チ $\mathfrak{V} \ni a \longleftrightarrow A$ ナルアル一定ノ空間 Ω ノ Teilmenge ガ對應シテ，$a \longleftrightarrow A$, $b \longleftrightarrow B$ ナラバ，$a \vee b \longleftrightarrow A \vee B$, $a \wedge b \longleftrightarrow A \wedge B$ ヲ満足スル様ニ出來ル。（$\vee$，$\wedge$ ハ集合トシテノ Vereinigung ト Durchschnitt ヲ示ス。）(G. Birkhoff, Stone 等)

然シ Mengenverband ハ distributiv デアルカラ，一般ノ Verband ニツイテハ同ジコトハ成立シナイ。其ノタメニ

Def. 『teilweisegeordnete Menge $\mathfrak{H}$ ニ於テ，任意ノ二元 a, b ニ對シテ $a \wedge b = c$（即チ $c \subset a$, $c \subset b$ デ，且ツ $x \subset a$, $x \subset b$ ナラバ $x \subset c$ トナルモノ）ガ存在スルトキニ，$\mathfrak{H}$ ヲ（此処デ限リニ）Halbverband ト呼ブ』

コトニスル。其ノ時ハ

Satz 1. 『任意ノ Halbverband $\mathfrak{H}$ ハ Mengenhalbverband トシテ表ハスコトガ出來ル。即チ，アル空間 Ω ヲ作リ $\mathfrak{H} \ni a \longleftrightarrow A$ ナル Ω ノ Teilmenge ヲ

對應シツメテ, $a \longleftrightarrow A$, $b \longleftrightarrow B$ ナラバ $a \frown b \longleftrightarrow A \frown B$ ナラシナルコトガ出來ル.

此レヲ証明スルニハ

Satz 2. 『任意ノ Halbverband $\mathfrak{H}$ ハ destributiver Verband $\mathfrak{V}$ ニ einbetten 出來ル』 即チ $\mathfrak{H}$ ハ $\mathfrak{V}$ ノ一部分トナリ, 且ツ $a \frown b = c$ in $\mathfrak{H}$ ナラバ, $\mathfrak{V}$ ノ中デモ $a \frown b = c$ ニナル様ニ出來ルトイフノデアル。 Satz 2 カラ, Birkhoff ノ定理ヨリ Satz 1 ガ出ル。

特ニ $\mathfrak{H}$ ガ既ニ Verband デアル時ハヤヽ強ク

Satz 3. 『任意ノ Verband ハ Durchschnitt ト distributive Vereinigung トヲ保持シツヽ distributiver Verband ニ einbetten 出來ル』

コヽニ $a \smile b$ ガ distributive Vereinigung トハ, 任意ノ c ニ對シテ

$$(a \smile b) \frown c = (a \frown c) \smile (b \frown c)$$

ノ成立スルコトヲ云フ。

Satz 3 ハ H.M. Mac Neille (Partially ordered sets, Trans. Amer. Vol. 42, (1937)) ニヨツテ証明セラレタ。且ツコノ様ナ最小ノ Erweiterung $\mathfrak{V}$ ヲモトメテ キル。

以下ニ先ヅ A.H. Clifford (Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups, Ann. of Math., Vol. 39, (1938)) ノ方法ニヨツテ Satz 2, 3 ノ

別証ヲ與ヘ，次ニ distributiver Verband 及ビ Halbverband ノ Homomorphismus ニツイテソノ性質ヲシラベ，最後ニ Einbettungssatz トノ関係ニツイテ考ヘテ見タイト思フ。

2

Halbverband $\mathfrak{H}$ ガアルトキ，（同一元ヲ用ヒテ）$a \cdot b = a \frown b$ ト積ヲ定義スレバ $a \cdot a = a$ トナルカラ一ツノ idempotente Halbgruppe $\mathfrak{G}$ ヲ作ル。

逆ニスベテノ元ガ idempotent ナ Halbgruppe $\mathfrak{G}$ ガアレバ $a \frown b = a \cdot b$ ト定義スレバ Halbverband ニナル。即チ

Lemma 1. 「Halbverband ト idempotente Halbgruppe トハ $a \frown b = a \cdot b$ ナル関係デ互ニ對應スル。」

A. H. Clifford ニヨリ Halbgruppe $\mathfrak{G}$ ノ Ideal $\mathfrak{a}$ トハ，スベテノ $a \in \mathfrak{a}$ ニ對シテ $s \mid at$ トナル s, t ノ任意組ニ對シテ，又 $s \mid a't$ ヲ満足スル a' ハ $\mathfrak{a}$ ニ含マルヽヤウナ $\mathfrak{G}$ ノ Teilmenge ヲイフ。此處ニ $b \mid c$ トハ $bd = c$ ナル $d \in \mathfrak{G}$ ノ存在ヲイフ。特ニ $\mathfrak{G}$ ガ idempotent ナラバ $b \mid c$ ナラ $bc = b(bd) = c$ トナル。

又 $\mathfrak{G}$ ノ Teilmenge A ヨリ erzeugen サレル

別証ヲ與ヘ，次ニ distributiver Verband 及ビ Halbverband ノ Homomorphismus ニツイテソノ性質ヲシラベ，最後ニ Einbettungssatz トノ關係ニツイテ考ヘテ見タイト思フ。

2

Halbverband $\mathfrak{H}$ ガアルトキ，（同一元ヲ用ヒテ）$a \cdot b = a \frown b$ ト積ヲ定義スレバ $a \cdot a = a$ トナルカラ一ツノ idempotente Halbgruppe $\mathfrak{G}$ ヲ作ル。

逆ニスベテノ元ガ idempotent ナ Halbgruppe $\mathfrak{G}$ ガアレバ $a \frown b = a \cdot b$ ト定義スレバ Halbverband ニナル。即チ

Lemma 1.「Halbverband ト idempotente Halbgruppe トハ $a \frown b = a \cdot b$ ナル關係デ互ニ對應スル。」

A.H. Clifford ニヨリ Halbgruppe $\mathfrak{G}$ ノ Ideal $\mathfrak{a}$ トハ，スベテノ $a \in \mathfrak{a}$ ニ對シテ $s \mid at$ トナル s, t ノ任意組ニ對シテ，又 $s \mid a't$ ヲ滿足スル a' ハ $\mathfrak{a}$ ニ含マルヽ如ウナ $\mathfrak{G}$ ノ Teilmenge ヲイフ。此處ニ $b \mid c$ トハ $bd = c$ ナル $d \in \mathfrak{G}$ ノ存在ヲイフ。特ニ $\mathfrak{G}$ ガ idempotent ナラバ $b \mid c$ ナラ $bc = b(bd) = c$ トナル。

又 $\mathfrak{G}$ ノ Teilmenge A ヨリ erzeugen サレル

Ideal (A)トハ、スベテノ $a \in A$ ニ對シテ $s \mid at$ トナル任意ノ s, t ニ對シテ、$s \mid a't$ トナル a' ノ全体トスル。コレハAヲ含ム最小ノ Ideal デアル。

直チニ得ラレル關係トシテ

(I) (a) ハ $a \mid a'$ ナル a' ノ全体デアル。

(II) $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ （$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ ハ $\mathfrak{a}$ ノ元 a ト $\mathfrak{b}$ ノ元 b トノ積ノ作ル全体）

何トナレバ $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$ ハ明カ。逆ニ $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} \ni c = c^2 \in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.

(III) $A \supset B$ ナラバ $(A) \supset (B)$

(IV) $(A) \cdot (B) = (AB)$ （AB ハ $A \ni a$, $B \ni b$ ナル $a \cdot b$ ノ全体）。

何トナレバ $(A) \supset (AB)$, $(B) \supset (AB)$, 故ニ(II)カラ $(A) \cdot (B) \supset (AB)$。

逆ニスベテノ $a \in A$, $b \in B$ ニ對シテ $s \mid abt$ トナル任意ノ s, t ノ組ニ對シテ、$a' \in (A)$ ハソノ定義カラ $s \mid a'(bt)$ ヲ満足シ、$b' \in (B)$ ハソノ定義カラ $s \mid b'(a't)$ ヲ満足スル。故ニ $(A) \cdot (B) \subset (AB)$。

(V) $(a)(b) = (ab)$。

之レカラ直チニ

Lemma **2**. 『$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{c})$; $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$』

最後ノ式ハ $\mathfrak{a}^2 = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. 逆ニ $\mathfrak{a} \ni a = a \cdot a \in \mathfrak{a}^2$.

Lemma 2ノ後半カラ $\mathcal{O}_f$ ノ Ideal 全体ハ又 idempotente

Halbgruppe $\mathfrak{G}_1$ トナル。同様ニ $\mathfrak{G}$ ノ有限個ノ元ヨリ erzeugen サレル Ideal 丈ヲ考ヘテモ idempotente Halbgruppe $\mathfrak{G}_2$ ヲ作ル。夫々ヨリ Lemma 1 デ出来ル Halbverband ヲ $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ トスル。

Lemma 3. 『$\mathfrak{V}_1$ ($\mathfrak{V}_2$) ハ distributiver Verband トナル』

ソレハ Verband ノ元トシテ $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} \longleftrightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ デ定メラレルガ、其ノ時 $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ トナル。ソレニハ先ヅ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \supset \mathfrak{a}$ 及ビ $\mathfrak{b}$ ハ (III) ヨリ。逆ニ $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{b}$ ナラ $\mathfrak{c} \supset (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, 即チ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ デアル。其レ故先ヅ $\mathfrak{V}_1$ ハ Verband トナルガ, Lemma 2 ノ第一式ヨリ distributiver Verband トナル。

一方 (V) ヨリ $\mathfrak{h}$ ハ $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ ニ einbetten サレテヰルコトガワカル。即チ Satz 2 ハ証明セラレタ。特ニ $\mathfrak{h}$ ガ Verband ノ場合ニハ

Lemma 4. 『$\mathfrak{h}$ ガ distributiver Verband ナラバ $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{h}$, 即チスベテノ endliches Ideal ハ Hauptideal トナル。逆ニ $\mathfrak{h}$ ガ Verband デ、スベテノ endliches Ideal ガ Hauptideal ナラバ $\mathfrak{h}$ ハ distributiv デアル。』

(証) $\mathfrak{h}$ ガ Verband トスル。今 $a \cup b$ ガ distributiv Vereinigung ナリトスル。其ノ時ハ $(a \cup b) = (a, b)$ ヲ証明スレバ前半ハスム。

$s \mid at$, $s \mid bt$ ナル s, t ノ任意ノ組ガアレバ $sat=at$,

$sbt = bt$ カラ

$sat \cup sbt = (a \cup b) \cdot st = at \cup bt = (a \cup b) . t$,

即チ $s | (a \cup b) t$ トナリ, $a \cup b \in (a, b)$ トナル。逆ニ

上ノ s, t ニ対シテ $s | ct$ ナラバ, $s = a \cup b, t = 1$ トス

レバ $a \cup b | c$ トナリ, (I) カラ $(a \cup b) \supset (a, b)$ トナル。

即チ $(a \cup b) = (a, b)$ ガ成立スル。

逆ニ $(a, b) = (c)$ ナリトスレバ, 今述ベタ所カラ,

$(c) \subset (a \cup b)$, 即チ $a \cup b | c$ トナルガ, 一方 (I) カ

ラ $c | a$, $c | b$, 即チ $c | a \cup b$ トナリ, 上ト共ニ

$c = a \cup b$ トナル。

此ノトキハ Lemma 2 ヨリ $(d)(a, b) = (da, db)$,

即チ $d \frown (a \cup b) = (d \frown a) \cup (d \frown b)$ トナル。

Q. E. D.

之レカラ又 Satz 3 ガ証明セラレタ。

最後ニ $\mathfrak{V}_2$ ガ $\mathfrak{H}_y$ ノ Erweiterung トシテ最小ノモノデ

アルトイフコトヲ証明スル。

今 $\mathfrak{H}_y$ ガアル distributiver Verband $\mathfrak{V}$ ニ

Einbetten サレタトスル。$\mathfrak{V}$ カラ Halbgruppe

ヲ作リ, ソノ endliches Ideal ノ作ル Verband

ハ, Lemma 4 カラ又 $\mathfrak{V}$ ト一致スル。其ノ中デ特ニ

$\mathfrak{H}_y$ ノ有限箇ノ元ヨリ erzeugen サレル Ideal ヲ考

ヘレバ, ソレガ $\mathfrak{V}_2$ ト verband-isomorph ニナレ

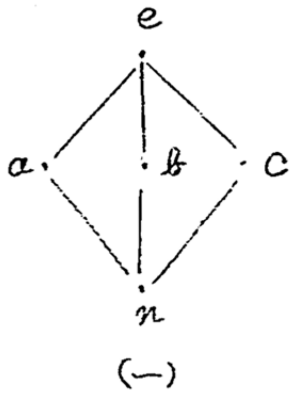
バ $\mathfrak{V}$ ノ中ノ一部分トシテ $\mathfrak{V}_2$ ガ含マレルカラ, $\mathfrak{V}_2$ ハ最

小ノ Erweiterung デアル。其ノタメニ

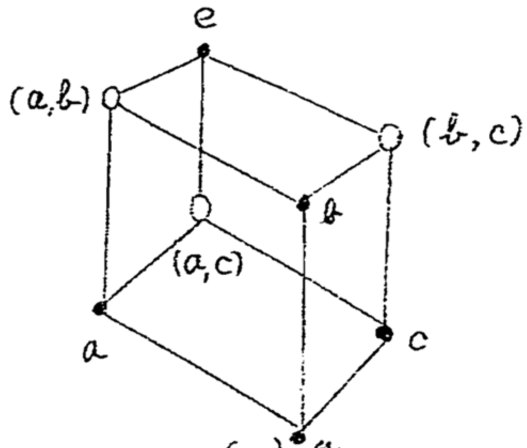
Lemma 5. 『二ツノ Halbgruppen $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ デ $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}'$ ナラバ，其レカラ Lemma 3 ノ $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2'$ ヲ作ルト，$\mathfrak{B}_2'$ 中 $\mathfrak{H}$ ノ元デ erzeugen サレル Ideal ノミヲ考ヘレバ，$\mathfrak{B}_2$ ト isomorph トナル。』

コトガ云ヘレバヨイ。証明ハ $A \subset \mathfrak{H}$ ニ対シテ $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ ニ於ケル Ideal $(A)_{\mathfrak{H}}, (A)_{\mathfrak{H}'}$ ヲ考ヘレバ，定義ヨリ直チニ $(A)_{\mathfrak{H}} = (A)_{\mathfrak{H}'} \cap \mathfrak{H}$ ナルコトガワカル。故ニ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ヲ $\mathfrak{B}_2$ ニ属スル Ideal トシ，$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ ナラ $(\mathfrak{a})_{\mathfrak{H}'} \neq (\mathfrak{b})_{\mathfrak{H}'}$. 又 $(\mathfrak{a})_{\mathfrak{H}'}(\mathfrak{b})_{\mathfrak{H}'} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{H}'}$ トナルカラ，Lemma ガ成立スル。Q.E.D.

例1. $\mathfrak{H}$ ガ e, a, b, c, n ヨリナル第一圖ニ示ス Verband ナラバ，$\mathfrak{B}_2$ ハ第二圖ノ作ル Verband ニナル。

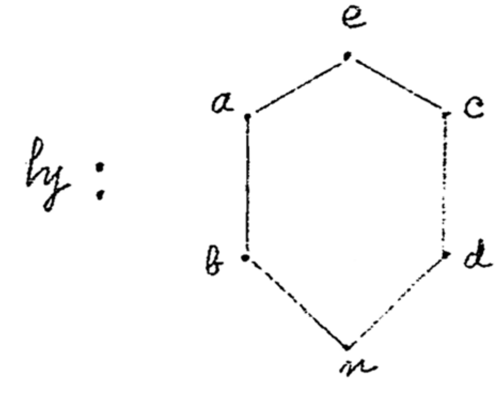


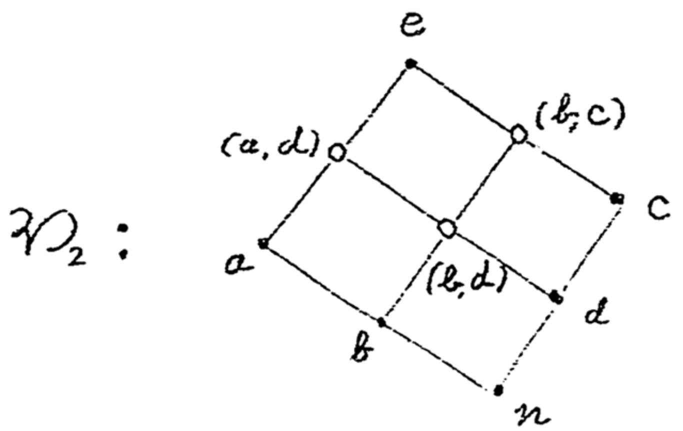
(一)



(二)

例 2.





3

上ノ方法ハ形式的デアルカラ，ソノ性質ヲモット判明サセルタメニ，2トハ全然独立ニVerbandノHomomorphismusニ就イテ考ヘル。

$\mathfrak{V}$ヲ distributiver Verband mit eトスル。$\mathfrak{V}$ノHomorphismusトハ$\mathfrak{V}$ノ或ルVerband $\overline{\mathfrak{V}}$ヘノ一意對應：$a \to f(a) \in \overline{\mathfrak{V}}$デ

$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b),\ f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$

ヲ満足スルモノヲイフ。$\overline{\mathfrak{V}}$モ勿論 distributivトナル。
二ツノHomorphismus f_1, f_2デ

$$f_1(a) = f_1(b) \longleftrightarrow f_2(a) = f_2(b)$$

ナル時f_1トf_2トハ同一ノモノト考ヘルコトトスル。

次ニ$\mathfrak{V}$ノHomormorphismus全体$\mathfrak{H}$ニAnordnungヲ導入スル。

Def. $f_1 \supset f_2$トハ$f_1(a) \supset f_1(b)$ナラバ$f_2(a) \supset f_2(b)$トナルコトヽスル。

コレデ$\mathfrak{H}$ハ teilweisegeordnetトナル。

特別ナHomorphismusトシテ$\mathfrak{V}$ノ元eニヨ

ル Projektion f_e ガアル。即チ $a \to e \frown a$ ヲ對應サセル Homorphismus デアル。容易ニワカル様ニ Projektion ニツイテハ

$$f_e \supset f_{e'} \longleftrightarrow e \supset e'$$

トナル。

$\mathfrak{O}$ ノスベテノ Primideal $\mathfrak{p}$ ノ集リヲ考へ，各 $\mathfrak{p}$ ニ一点 P ヲ對應サセ，P ノ全体ノ作ル空間ヲ Ω トスル。$\mathfrak{O}$ ヨ a ニ対シテ $a \notin \mathfrak{p}$ ナルスベテノ P ノ集リ A ヲ對應サセレバ，G. Birkhoff-Stone ノ理論カラ $a \to A$ ハ $\mathfrak{O}$ ノ，Ω ノ Teilmenge ノ作ル Mengenverband ヘノ isomorph ナ對應トナル。$\mathfrak{O}$ ノ元ニヨル Projektion ト同様ニ Ω ノ Teilmenge E カラ $a \to A \frown E$ ナル Homorphismus f_E ヲ作ルコトガ出來ル。逆ニ

Satz 4 『$\mathfrak{O}$ ノ任意ノ Homorphismus f ハアル f_E ニ等シイ。』

(註) $\mathfrak{O}$ ノ f ニヨル Bildverband ヲ $\overline{\mathfrak{O}}$ トスル。$\overline{\mathfrak{O}}$ ノ Primideal $\overline{\mathfrak{p}}$ ノ f ニヨル Urbild 全体 $\mathfrak{p}$ ハ又 $\mathfrak{O}$ ノ Primideal トナル。$\overline{\mathfrak{O}}$ ノスベテノ Primideal $\overline{\mathfrak{p}}$ ノ Urbild $\mathfrak{p}$ ニ對應スル Ω ノ点 P ノ全体ヲ E トスルト，$f = f_E$ トナル。即チ $a \to A \frown E$ トスレバ，$a \in \mathfrak{p}$ ナラバ $f(a) \in \overline{\mathfrak{p}}$，$a \notin \mathfrak{p}$ ナラバ $f(a) \notin \overline{\mathfrak{p}}$ ナル故，$f(a)$ ヲ $\overline{\mathfrak{O}}$ ノスベテノ Primideal $\overline{\mathfrak{p}}$ ノ作ル空間 $\overline{\Omega}$ ヘノ表現ト äquivalent ニナルカラデアル。　Q.E.D.

然シ $E \neq E'$ デモ $f_E = f_{E'}$ トナルコトヘアル。Homorphismus f ニ對シテ eindeutig ニ $f = f_E$ トナル E ノ代表 E^r ヲカユルスベテノ E ヲ含ムモノトシテ定メル。即チ

（VI） $f = f_E$ ナルスベテノ E ニツイテ $E^r = \sum E$ トスレバ $f = f_{E^r}$ トナル。

何トナレバ $f(a) \supset f(b)$ ナラバ $E \wedge A \supset E \wedge B$. 故ニ $\sum(E \wedge A) \supset \sum(E \wedge B)$, 即チ $(\sum E) \wedge A \supset (\sum E) \wedge B$. 故ニ $f \supset f_{E^r}$. 逆ノ方ハ次ノ VII ヨリ.

（VII） $E \supset E'$ ナラバ $f_E \supset f_{E'}$.

（VIII） $f_1 \supset f_2$ ナラバ, 夫々ノ Maximal ナ代表 E_1^r, E_2^r ヲトレバ $E_1^r \supset E_2^r$.

其レニハ $f_E \supset f_{E'}$ ナラ $f_{E \vee E'} = f_E$ ヲイヘバヨイ。$E \wedge A \supset E \wedge B$ ナラ $E' \wedge A \supset E' \wedge B$,

故ニ $(E \vee E') \wedge A \supset (E \vee E') \wedge B$. 即チ $f_E \supset f_{E \vee E'}$. 逆ハ VII カラ。Q.E.D.

（IX） $\mathfrak{M}$ ノ元 a ニヨル Projektion f_a ノ代表部分集合ハ $a \to A$ ナル A デアル。

何トナレバ $f_a(\Omega) = f_a(A) = A$, 故ニ $f_a = f_E$ ナラ $f_E(\Omega) = f_E(a) = E \wedge A = E$. 即チ $A \supset E$ トナル。

Satz 5. 「$\mathfrak{M}$ ノ Homorphismus 全体ハ上ニ定メタ Anordnung デ Verband トナル」

（証） $f_1 = f_{E_1}$, $f_2 = f_{E_2}$ ニアル E_1, E_2 ヲトレバ

$\mathfrak{V}$ ノアル teilweisegeordnete Menge ヘノ Abbildung f_3 ヲ

$$(1) \quad f_3(a) \supset f_3(b) \longleftrightarrow \begin{cases} f_1(a) \supset f_1(b) \\ f_2(a) \supset f_2(b) \end{cases}$$

デ定メル。若シモ f_3 ガ Homomorphismus トナレバ，明カニ $f_3 = f_1 \cup f_2$ トナル。シカルニ (1) ノ右辺ハ $E_1 \wedge A \supset E_1 \wedge B$ 及ビ $E_2 \wedge A \supset E_2 \wedge B$，即チ $(E_1 \vee E_2) \wedge A \supset (E_1 \vee E_2) \wedge B$ トナルカラ $f_3 = f_{E_1 \vee E_2}$ ハ Homomorphismus トナル。

次ニ $f_1 = f_{E_1{}^r}$，$f_2 = f_{E_2{}^r}$ ト Maximal ナ代表 $E_1{}^r$，$E_2{}^r$ ヲトル。$f_3 = f_{E_1{}^r \wedge E_2{}^r}$ ト置ク。(VII) カラ $f_1 \supset f_3$，$f_2 \supset f_3$ デアル。今 $f_1 \supset f_E$，$f_2 \supset f_E$ ナリトスレバ (VIII) カラ $E \subset E_1{}^r \wedge E_2{}^r$，即チ $f_3 \supset f_4$ トナル。故ニ $f_3 = f_1 \wedge f_2$ トナル。 Q. E. D.

Satz 6. 『$\mathfrak{V}$ ノ元ニヨル Projektion f_a ニ對シテハ $a \neq b$ ナラ $f_a \neq f_b$，且ツ

$$f_a \cup f_b = f_{a \vee b}, \quad f_a \wedge f_b = f_{a \wedge b}$$

トナル。

即チカヽル全体ハ $\mathfrak{V}$ ト isomorph ナ $\mathfrak{V}$ ノ Homomorphismenverband ノ Teilverband ヲナス。』

(証) $a \not\supset b$ トスレバ $f_b(e) = f_b(b) \neq f_b(a)$；一方 $f_a(a) = f_a(e)$．故ニ $f_a \neq f_b$．$f_a \cup f_b = f_{a \vee b}$ ハ Satz 5 ノ証明ヨリ。$f_a \wedge f_b = f_{a \wedge b}$ ハ Satz 5 ノ証

明ト(IX)ヨリ。

4

以上ハ distributiver Verband ニ就イテ考ヘタガ，今度ハ Halbverband $\mathfrak{V}$ ニ就イテ考ヘル。Homomorphismus トハ或ル Halbverband ヘノ一意對應 $a \to f(a)$ デ

$$f(a \frown b) = f(a) \frown f(b)$$

ヲ満足スルモノヲ云フ。Homomorphismus ノ間ノ Anordnung ハ 3 ト同様ニ定義スル。

Satz 7.「適當ナ空間 Ω ニ $\mathfrak{V}$ ヲ Einbetten スレバ ($a \to A \subset \Omega$), $\mathfrak{V}$ ノ任意ノ Homorphismus f ハ Ω ノアル Teilmenge E ニヨル Projektion f_E トシテ得ラル；

$$\{a \to f(a)\} = \{a \to E \frown A\}.」$$

(證) $\mathfrak{V}$ ノスベテノ Homomorphismus $\{f\}$ ヲ考ヘ，各 f ニツイテ $\mathfrak{V}$ ノ Bildhalbverband ヲ $\mathfrak{V}_f$ トシ，Einbettungssatz (Satz 1) ヨリ $\mathfrak{V}_f$ ヲ空間 Ω_f ノ Mengenhalbverband トシテアラハシ，スベテノ Ω_f ノ Vereinigungsraum Ω ヲ考ヘル。$a \to f(a) \longleftrightarrow A_f \subset \Omega_f$ トシテ $\mathfrak{V}$ ハ Ω_f ノ Teilmenge ニ homomorph ニ寫像サレルカラ，$a \to \sum_f A_f = A \subset \Omega$ ナル對應ハ $\mathfrak{V}$ ノ Ω ヘノ Isomorphismus トナル。明カニ $f = f_{\Omega_f}$ トシテアラハサレル。即チ Ω ガモトメル空間デアル。 Q.E.D.

之レカラ３ノ議論ハ $a^{\cup}b$ ガ問題ニナル最後ノ部分ヲ除キ全ク同様ニ成立スル。

Satz 8. 『$\mathfrak{H}$ ノ Homorphismus 全体ハ Verband トナリ, $\mathfrak{H}$ ノ元ニヨル Projektion ハ $f_a \frown f_b = f_{a\frown b}$, $a \neq b$ ナラ $f_a \neq f_b$ トナリ, $\mathfrak{H}$ ト isomorph ナ Teilverband ヲ作ル。』

5

４デハ Satz 1 ヲ用ヒテ結果ヲ出シタケレドモ, 逆ニ２ニ於ケル Einbettungssatz ノ証明ハ４ノ結果カラ考ヘルト, 良クソノ意味ガワカルヤウニ思ハレル。先ヅ $\mathfrak{H}$ ノ元 a ニ對シテハ, $\mathfrak{H}$ ヲ $e \to a \frown e$ ナル Projektionsoperator f_a ガ對應セシメラレル。

Projektionsoperator 全体ハ明カニ idempotent ナ Halbgruppe ヲ作リ, $f_a \cdot f_b = f_{a\frown b}$ トナルカラ, 實際ニ Operator トシテノ積ト $a \frown b$ ナル Durchschnitt トガ對應スル。即チ

Halbverband $\mathfrak{H}$ ヲ Halbgruppe $\mathfrak{G}$ ニ對應セシメタノハ, Projektionsoperator トシテ $\mathfrak{H}$ ヲ考ヘタコトニナル。

今 $\mathfrak{H}$ ガアル空間 Ω 中ニ Mengenhalbverband トシテ darstellen サレタトスル。Ω ノ任意ノ Teilmenge E ニ對シテ, ３ノ如ク Homorphismus f_E ガ対應スル。此ノ Darstellung デ $\mathfrak{H}$ ヲ $a \to A$

ナリトスレバ, $\mathfrak{k}_y$ ヲ含ム最小ノ distributiver Verband トシテ, カヽル有限個ノ Vereinigung $A_1 \vee \cdots \cdots \vee A_n$ ノ作ル Verband $\mathfrak{V}$ ガ定マル。且ツ容易ニワカル如ク, 之レ等ニ対應スル Homomorphismus $f_{A_1 \vee \cdots \cdots \vee A_n}$ ハ互ヒニ異ナッテ居ル。

其レ故 $\mathfrak{V}$ ヲ定メルニハ, Homomorphismus トシテノ $f_{A_1 \vee \cdots \cdots \vee A_n}$ ノ特徴ヲツカメバヨイコトニナル。其ノコトハ 4, 5 ニ対シテ Homomorphismus 全体ノ作ル Verband 中 $f_{A_i} = f_{a_i}$ $(i = 1, \cdots\cdots, n)$ ヲ含ム最小ノモノトシテ考ヘレバヨイコトガ結論サレテ居ル。(Satz 5, 6). 即チ Satz 5 ノ証明中ノ (1) 式ヨリ $s, t \in \mathfrak{k}_y$ ニ対シテ

$$f_{A_1 \vee \cdots\cdots \vee A_n}(s) \supset f_{A_1 \vee \cdots\cdots \vee A_n}(t) \longleftrightarrow f_{a_i}(s) \supset f_{a_i}(t)$$

$$(i = 1, \cdots\cdots, n)$$

テ $f_{A_1 \vee \cdots\cdots \vee A_n}$ ガ特徴ヅケラレル。右辺ハ書キ直シテ

$$f_{a_i}(s) \supset f_{a_i}(t) \longleftrightarrow a_i \cap s \supset a_i \cap t \longleftrightarrow a_i \cdot s \,|\, a_i t \longleftrightarrow s \,|_{a_i}\, t$$

トナル。

従ッテ $f_{A_1 \vee \cdots\cdots \vee A_n} \supset f_{B_1 \vee \cdots\cdots \vee B_m}$ ハ

『$s \,|\, a_i t$ $(i = 1, \cdots\cdots, n)$ ヲ満足スルスベテノ $s, t \in \mathfrak{k}_y$ ニ對シテ, 又 $s \,|\, b_i t$ $(i = 1, \cdots\cdots, m)$ ガ成立スル』トアラハスコトガ出來ル。特ニ $f_{A_1 \vee \cdots\cdots \vee A_n} \supset f_b$ ハ

『$s \,|\, a_i t$ $(i = 1, \cdots\cdots, n)$ ヲ満足スルスベテノ $s, t \in \mathfrak{k}_y$ ニ對シテ, 又 $s \,|\, b t$ ガ成立スル』

ト云フコトニナル。カヽル b ノ全体ヲ集メタモノガ $(a_1, \cdots, a_n)$

ナル Ideal デアッタ。

上ノ二ツノ事ヲ共ニ考ヘレバ，

$$「f_{A_1}\vee\cdots\cdots\vee_{A_n}\supset f_{B_1}\vee\cdots\cdots\vee_{B_m}\longleftrightarrow(a_1,\cdots\cdots,a_n)\supset(b_1,\cdots,b_m)」$$

ナルコトガワカル。コレカラ

$$「f_{A_1}\vee\cdots\cdots\vee_{A_n}=f_{B_1}\vee\cdots\cdots\vee_{B_n}\longleftrightarrow(a_1,\cdots\cdots,a_n)\doteq(b_1,\cdots,b_n)」$$

トナル。即チ Homomorphismus $f_{A_1}\vee\cdots\cdots\vee_{A_n}$ ノ作ル Verband ガ Ideal $(a_1,\cdots\cdots,a_n)$ ノ作ル Verband トシテ表ハサレタ事ニナル。之レデ大体2ノ形式的ナ証明ノ意味ガ判明シタ様ニ思ハレル。