873. Pythagorian ring ニ就テ I

吉田 耕作（阪大）

"Spectral analysis" ノ代數的取扱ヒハ此頃ノとぴっくすデアッテ von Neumann H. Freudenthal, S. Steen, 角谷, P. Halmos, H. Stone 等ニヨッテ夫々ノ方法並ビニ結果ノ報告ガナサレツヽアル。以下ニハ"實數体トノ類似"ニ着目シテノ取扱ヒヲ述ベテミタイ。未ダ反省ガ足リナイカラ axiom 等多スギルカモ知レナイ。（尚 Pythagorian トエフ言葉ハ Weyl: Classical grup カラノ思ヒ付キデ適切カドウカハ分ラナイ）.

$\boxed{\text{公理群}}$ 實數体ヲ係數トシタ可換ナ環 R ガ単位 I ヲ有ッテヰルトスル。（以下実數ヲ小文字デ $a, b, \cdots\cdots, \lambda, \mu, \cdots\cdots$ 等 R ノ元ヲ $A, B, C\cdots\cdots$ 等ト記ス）R ハ尚次ノ公理群ヲ満足スルトスル。

i) $A^2=0$ ナラ $A=0$

ii) B^2 ノ如ク表ハサレル元 A ヲ"正ノ元"ト名ヅケルコトニスルト正ノ元ノ和ハ又正デアル。即チ B, C ニ対シ D ガ定ッテ $B^2+C^2=D^2$. ——之ガ pythagorian ノ由来デス. 又可換ト假定シタカラ積ニ関シテモ pythagorian 即チ正ノ元ノ積ハ正ニナル訳デス。

iii) A ガ正ナルコトヲ $A>0$[1] ト書クコトニスルト "semi-order" $A>B$ ($A-B>0$ ノ意) ニ関シテ R ハ lattice ヲ作ル。即チ任意ノ A, B ニ対シ least upper bound $\sup(A,B)$, greatest lower bound $\inf(A,B)$ ガ定ル.

---

(1) trivial ナ正ノ元トシテ0ノ入ルコトハ云フ迄モナイ。

iii)′ 上ニ（下ニ）押ヘラレタ点列 $\{A_n\}$ ニ対シ同ジク $\sup_n (A_n)$ （$\inf_n (A_n)$）ガ定マ。

iv) 連続性. $\sup_n A_n$, $\sup_n B_n$ ガ存在スル場合ニハ $(\sup_n A_n) \circ (\sup_n B_n) = \sup_{n,m} (A_n \circ B_m)$, 但 $\circ$ ハ $+$ 或ハ $\times$ ヲ示スモノトスル。

—（以上）—

$\boxed{\text{公理群カラノ諸結果}}$

1) $A > 0$ トスルト $A = B^2$. $B_+ = \sup (B, 0)$, $B_- = \sup (-B, 0)$ トヲクト $B = B_+ - B_-$, 且ツ $B_+ B_- = \sup (-B^2, 0) = 0$ ((iv)ニヨル) デアル。依テ A ノ "正ノ二乗根" $A^{\frac{1}{2}}$ ガ

$$A^{\frac{1}{2}} = B_+ + B_- \qquad (A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A)$$

ト定義出来ル。明ラカニ

$$A^{\frac{1}{2}} = \sup_C (C > 0;\ C^2 \leqq A)$$

2) $A > 0$ トシ $A_1 = \inf_n (A^n)$, $A_2 = A - A_1$ トヲクト $A_1^2 \geqq A_1$, $A_1 A_2 = 0$ 且ツ $A_2^2 \leqq A_2$

証明. $A_1^2 = \inf_{n,m \geqq 1} (A^{n+m}) \geqq A_1$. $A_1 A_2 \geqq 0$

且ツ $A_1 A_2 = A_1 A - A_1^2 = \sup_{n \geqq 1} (A^{n+1}) - \sup_{n,m \geqq 1} (A^{n+m}) = 0$

カラ $A_1 A_2 = 0$. 次ニ上カラ $A_2^2 = A^2 - 2AA_1 + A_1^2 = A^2 - A_1^2$

從ッテ $A^2-A_1^2 \leqq A-A_1$ ヲ証明スレバヨイ。所ガ

$$A^{n+1}-A^2-A^n+A=A(A-I)^2(A^{n-2}+A^{n-3}+\cdots\cdots+I)\geqq 0$$

ダカラ $\inf_{n\geqq 1}(A^{n+1})-A^2\geqq \inf_{n\geqq 1}(A^n)-A$ 即チ

$A\cdot A_1-A^2=A_1^2-A\geqq A_1-A$ ヲ得テ証明ヲ終ル。

3) 1)ニヨリ $0<A<B$ ナラバ $0<A^{\frac{1}{2}}<B^{\frac{1}{2}}$ ヨッテ 2)ニ

得ダ A_1 ニ對シ $A_1>A_1^{\frac{1}{2}}>A_1^{\frac{1}{2^2}}>\cdots\cdots>A_1^{\frac{1}{2^n}}>\cdots\cdots>0$.

ヨッテ $\lim_{n\to\infty}A_1^{\frac{1}{2^n}}=E$ ガ存在シ(1) 且ツ明ラカニ $E^2=E$

(*idempotent*), $E\leqq A_1$. コノ E ハ

$$AE=A_1=A_1E\geqq E,$$

$$A(I-E)=A_2=A_2(I-E)\leqq I-E$$

ヲ満足スル。

<u>証明</u>. 先ヅ $A_2E=0$. 何者, $A_2E=\lim_{n\to\infty}A_2A_1^{\frac{1}{2^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}(A_2^{2^n}A_1)^{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}(A^{2^n-1}\cdot A_2A_1)^{\frac{1}{2^n}}=0$. ヨッ

テ $AE=A_1E+A_2E=A_1E$.

次ニ $A_1\leqq A_1^2$ カラ $A_1^{2^n}\leqq A_1^{2^n+1}$, 之ヲ開イテ $A_1\leqq A_1^{1+\frac{1}{2^n}}$.

---

(1) 点列 $\{B_n\}$ ニ對シ $\overline{\lim_{n\to\infty}}B_n=\inf_m(\sup_{n\geqq m}B_n)$,

$\underline{\lim_{n\to\infty}}B_n=\sup_m(\inf_{n\geqq m}B_n)$ ヲ定義スルトキ

$\overline{\lim_{n\to\infty}}B_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}B_n$ ノトキ之レヲ $\lim_{n\to\infty}B_n$ ト書ク。

従テ $A_1 \geqq A_1 E$. 一方 *idempotent* ト云フコトカラ $E \leqq I$[1] ダカラ $A_1 \geqq A_1 E$ 即チ $A_1 = A_1 E$.

又 $A(I-E) = A_2 = A_2(I-E)$ ハ以上カラ明カデアルが $A_2(I-E) \leqq I-E$ ヲ云フニハ $A_2 \leqq I$ ヲ云フトヨイが之ハ $0 \leqq (I-A_2)^2 = I-2A_2+A_2^2 \leqq I-2A_2^2+A_2 = I-A_2$ (2) ニヨリ $A_2^2 \leqq A_2$) カラ明カデアル。

—— 以上 ——

4) 2), 3) ヲ今一度マトメルト $A>0$ ナルトキ $\lambda>0$ ニ對シ

$$\boxed{E_\lambda = I - \left\{ \lim_m \left[\inf_n \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n \right]^{\frac{1}{2^m}} \right\}}$$

ト置クトキ

$$\boxed{\begin{aligned} &E_\lambda^2 = E_\lambda, \quad E_\lambda A = E_\lambda \left(\frac{A}{\lambda}\right)\lambda \leqq \lambda E_\lambda, \\ &A(I-E_\lambda) = \lambda\left(\frac{A}{\lambda}\right)(I-E_\lambda) \geqq \lambda(I-E_\lambda) \end{aligned}}$$

5) $\lambda > \mu > 0$ ノトキ $E_\mu \leqq E_\lambda$ 且ツ $E_0 A = 0$, $E_\infty A = A$. 証明ハ 4) カラ明カ。ヨッテ $\lambda > \mu$ ノトキ $E_\lambda - E_\mu$ ハ又 *idempotent*.

何者, $E_\lambda \leqq I$ カラ $E_\lambda E_\mu \leqq E_\mu$ 且ツ $E_\lambda \geqq E_\mu$ ニヨリ $E_\mu^2 \leqq E_\lambda E_\mu$ ダカラ $E_\lambda E_\mu = E_\mu$ デアル. 斯クシテ

$$\boxed{(E_\lambda - E_\mu)^2 = E_\lambda - E_\mu \qquad \lambda > \mu}$$

---

(1) $0 \leqq (I-E)^2 = I-2E+E^2 = I-E$

$$\boxed{A(E_\infty - E_0) = A}$$

5) $\lambda > \mu > 0$ ノトキ

$$\boxed{\lambda(E_\lambda - E_\mu) \geqq A(E_\lambda - E_\mu) \geqq \mu(E_\lambda - E_\mu)}$$

証明　$A(E_\lambda - E_\mu) = AE_\lambda(E_\lambda - E_\mu) = AE_\lambda(I - E_\mu)$ $\geqq \mu E_\lambda(I - E_\mu) = \mu(E_\lambda - E_\mu)$　(4) ニヨル。)
他ノ半分ノ不等式モ同様ニシテ得ラレル。

7)　5) ニヨリ $E_{\lambda-0} = \sup\limits_{\mu<\lambda} E_\mu$ ナル idempotent 存在シ，$E_\lambda - E_{\lambda-0}$ ハ又 idempotent ニナル。実ハ

$$\boxed{E_\lambda = E_{\lambda-0}}$$

証明．　6) カラ $\lambda(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = A(E_\lambda - E_{\lambda-0})$．故ニ
$(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = (I - E_\lambda)(E_\lambda - E_{\lambda-0}) = 0$
((4) ト 5) トニヨル)。

8) spectral theorem　$A > 0$，$\mu > 0$ トスル。
0 ト μ ノ間ニ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ ヲ挿入シ $0 < \lambda_i - \lambda_{i-1} < \varepsilon$ ナラシメル。λ_i' ヲ $\lambda_i \leqq \lambda_i' \leqq \lambda_{i+1}$ ナラシメルト

$$-\varepsilon I \leqq AE_\mu - \sum_i \lambda_i'(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i}) \leqq \varepsilon I.$$

何者，(?)中ノ項ハ，$E_\mu = \sum\limits_i (E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$ トヲクト，
$(A - \lambda_i')(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$ ナル形ノ項ノ和ダカラ 6) ヲ使

ヘバ

$$\sum_i (\lambda'_i - \lambda_i)(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i}) \leqq A E_\mu - \sum_i \lambda'_i (E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i})$$
$$\leqq \sum_i (\lambda_{i+1} - \lambda'_i)(E_{\lambda_{i+1}} - E_{\lambda_i}).$$

故ニ $A E_\mu = \int_0^\mu \lambda \, dE_\lambda$

ト書ケル。$\mu \to \infty$ ナラシメルト 5) ニヨリ

$$\boxed{A = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda}$$

斯クシテ 正ノ元 ニ對スル spectral theorem ガデキタカラ，次カラハ之ヲ用ヒテ operational calculus ヲ取扱ッテミヨウ。

（ツヅク）