

874. 重複核ノ固有値ニ就テ

佐藤 常三 (東京工科大学)

$K_n(x, y)$ ヲ $K(x, y)$ ノ第 n 重複核トスレバ

(A) λ ヲ K ノ固有値, φ ヲ $\lambda = \int \varphi(x) \varphi(y) dx dy$ ノ固有函数トスレバ λ^n ハ K_n ノ固有値トナリ, φ ハ亦 $\lambda^n = \int \varphi(x) \varphi(y) dx dy$ ノ固有函数トナル。

ト云フコトハ十分知ラレテキル。又若干技巧的ナ方法ニヨツテ (Vivanti-Schwank, (1929) P.P. 119-120) 次ノ定理モ証明サレテキル。

(B) λ ガ K_n ノ固有値ナレバ, $\sqrt[n]{\lambda}$ ノ少クトモ一ツハ K ノ固有値トナル。

コノ証明ハ私ノ散見シタ参考書ガハ對稱核ノトキタケデ, 僅カニ上記 Vivanti ノ著書ガ一般核ノ場合ヲ取扱ツテキルマウニ思ヘル。

(A) ヲ一般化シタ場合, コレモヨク知ラレテキル。

即チ

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ニヨツテ定義サレル多項核ヲ

$$f(K) = a_1 K + a_2 K^2 + \dots + a_n K^n$$

トカケバ

(A') λ ヲ K ノ固有値, φ ヲ固有函数トスレバ, $1/f(\frac{1}{\lambda})$ ハ多項核 $f(K)$ ノ固有値トナリ, φ 亦固有函数トナル。

(A) = 對スル (B) / 如ク =, (A') = 對シテ

(B') λ ヲ多項核 $f(K)$ ノ固有値トスレバ, $\frac{1}{\lambda} = f(\frac{1}{\alpha})$
ノ少クトモ一様ハ K ノ固有値トナル。

ト云フ定理ガ考ヘラレル。 K ガ對稱核ナルトキハ既ニ二三ノ著者ガ1912—1913頃函數ノ变换群ヲ研究スル途次副産物トシテ, コノ定理ヲ得テキル。一般ノ場合ニ對シテモ巧妙ノ証明ガ行ハレテアルニ相違ナイト思フガ, 最近私ノ試ミタ証明ヲ紹介シタイ。寔ニ貴重ナ紙面ヲ汚シテ恐縮デスガ。

マツテ假定ニヨレバ

$$(1) \varphi(x) = \lambda \int_0^1 f(K(x, y)) \varphi(y) dy$$

代數方程式 $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\lambda}$ ノ一様ヲ α トオケバ

$$(2) a_1 \left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_2 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{\lambda}$$

便宜上以下 $\int K \varphi = \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy$ ト略記シ, 新函數

$$(3) \omega = \varphi + b_1 \int K_1 \varphi + b_2 \int K_2 \varphi + \dots + b_{n-1} \int K_{n-1} \varphi$$

ヲ導入スル, 但シ係數 b_k ハ次ノ如クニキメル:

$$(4) \alpha - b_1 = \lambda a_1,$$

$$\alpha b_1 - b_2 = \lambda a_2, \dots, \alpha b_{n-2} - b_{n-1} = \lambda a_{n-1}$$

コレヨリ

$$(4) \begin{cases} b_1 = \alpha - \lambda a_1, \\ b_k = \alpha^k - \lambda a_1 \alpha^{k-1} - \dots - \lambda a_{k-1} \alpha - \lambda a_k, (k=1, 2, \dots, n-1) \end{cases}$$

トナルカラ, $\alpha = \text{對シテ } b'_n \text{ ハ悉ク單一的ニキマル. (2), (4') = \exists \text{ レバ}$

$$(5) \quad \alpha b_{n-1} = \lambda a_n$$

ナル關係が成立スル。何者,

$$\begin{aligned} \alpha b_{n-1} - \lambda a_n &= \alpha^n - \lambda a_1 \alpha^{n-1} - \dots - \lambda a_{n-1} \alpha - \lambda a_n \\ &= \lambda \alpha^n \left\{ \frac{1}{\lambda} - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

扱テ (3) 7 (4) = ヲツテ変形スレバ

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi + (\alpha - \lambda a_1) \int K_1 \varphi + \sum_1^{n-2} (\alpha b_k - \lambda a_{k+1}) \int K_{k+1} \varphi \\ &= \varphi + \alpha \left[\int K_1 \varphi + \sum_1^{n-2} b_k \int K_{k+1} \varphi \right] - \lambda \int [a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots] \varphi \\ &= \varphi + \alpha \int K_1 \varphi + \alpha \int K_1 \left[\sum_1^{n-2} b_k \int K_k \varphi \right] \\ &\quad - \lambda \int [f(\mathcal{K}) - a_n K_n] \varphi \end{aligned}$$

(3) 7 用テレバ

$$= \varphi + \alpha \int K_1 \omega - \lambda \int f(\mathcal{K}) \varphi + (\lambda a_n - \alpha b_{n-1}) \int K_n \varphi$$

(1), (5) 7 用ヒレバ

$$= \alpha \int K \omega$$

コレハ ω が非0ナルレバ, α が K ノ固有値ニシテ, ω がコレニゾクスル固有函数ナルコトヲ示ス。

サテ (2) を充たす α の値ヲ

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

トシ、 $\alpha_i =$ 對應シテ (4) = ヨツテ決定サレル b'_p の
値ヲ

$$b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in-1}$$

トカケバ、(3) ヨリ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ [$\alpha_i =$ 對シテ
 ω_i が] が得ラレル。由テ次ノコトが云ヘル: 若シモ
 $\omega_i \neq 0$ 十レバ、 α_i が K の固有値トナリ、 ω_i がソレ
= ゴクナル固有函数トナル。

特ニ ω'_Δ が悉ク $\equiv 0$ トナル場合ニハ (4) の b'_p を以
テ

$$g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$$

トカケ。シカルトキハ假定ニヨリ (3) の

$$g = - \int g(K) g$$

トナル。コレハ多項核 $g(K)$ が -1 ヲ固有値ニ有ツコトヲ
示ス。

茲ニ於テ前述ノ事柄ヲ繰返ス; 即チ (2) = 對應
シテ

$$b_1 \left(\frac{1}{\beta}\right) + b_2 \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \dots + b_{n-1} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-1} = -1$$

ナル如キ β を求メ、コレニ對シテ

$$\beta - c_k = -b_k, \quad \beta c_k - c_{k+1} = -b_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots, n-3)$$

ヨリ c'_Δ ヲ單一的ニ決定スレバ、(5) ト同様ニ

$$\beta C_{n-2} + b_{n-1} = 0$$

ヲ証明スルコトが出来、且ツ (3) ト同様 =

$$\eta = \varphi + C_1 \int K_1 \varphi + \dots + C_{n-2} \int K_{n-2} \varphi$$

トオケル。

$$\eta = \beta \int K \eta$$

が得ラレル。従ツテ $\eta \neq 0$ + レバ β がタシカ = K / 固有値トナル。

サテコゝ = 注目スベキハ β ハ (2) / 根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ / 一ツヲ表ハスコトデアリ。何ソトナレバ (4), (5) = ヨレバ

$$\begin{aligned} \lambda f(x) &= \lambda a_1 x + \dots + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \lambda a_n x^n \\ &= \alpha [x + b_1 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}] \\ &\quad - [b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}] \\ &= \alpha x + (\alpha x - 1) g(x), \end{aligned}$$

コレヲ利用スレバ $(g(\frac{1}{\beta}) = -1 = \text{注意シテ})$

$$\lambda f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)(-1) = 1$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

トナルカラ

況 = 若シモ、スベテ $\beta = \text{對シテ}$ 、ソレゾレ = 應ズル η が悉ク恒等的零トナルナラバ、再ビ上述ノ論法ヲ繰返ス

コトニスル。

何面目ニモ φ ノ如ク作ル函数ガ皆 $\equiv 0$ トナルヲ
バ, $\varphi \equiv 0$ ト云フ矛盾ニ到達シテ了フカラ, タトヘバ初メ
ヨリ j 面目ニハ $\zeta \neq 0$ ニテ $\zeta = \gamma \int K \cdot \zeta$ ナル如キ γ ,
 ζ ガ存在シ, 且ツ γ ハ

$$d_1 \left(\frac{1}{\gamma} \right) + d_2 \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2 + \dots + d_{n-j+1} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{n-j+1} = -1$$

ヲ満足シ, 同時ニ $f \left(\frac{1}{\gamma} \right) = \frac{1}{\lambda}$ トナル如キ番号 j ガ必
ズ見出サレル。コレデ (B') ガ証明サレタメヲ思フ。
コレデ K ノ固有値ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ トカケバ, $f(K)$
ノソレハ $1/f \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)$, $i = 1, 2, \dots$, デアルコトハ勿
論デアル。又 K ト $f(K)$ トガ交換可能デアルカラ對稱核
ノ場合ト同様ニ証明ガ遂行出来ルカモ知レナイガ, 橋敷ニ
關スル characteristic determinant, rank
ニツイテ, 種々ノ場合ガ論議サレテ相當複雑化レナイカ
ト怪シマレル。

[滿洲國立大學奉天工鉦技術院ニテ]