879. 對稱群ノ表現ニツイテノ一注意

中山　正（阪大）

對稱群ノ表現論デハヨク知ラレテヰル様ニ所謂 tableau (diagram) ガ重要且ツ便利ニ使ハレル．即チ n 個ノ文字ノ對稱群 S_n ノ表現論ニハ n 個ノ文字 $1, 2, \cdots\cdots, n$ ノ tableau

$$T: \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{\mu_1} \\ \beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_{\mu_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_1, \cdots\cdots, \rho_{\mu_r} \end{array}$$

$(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots\cdots \geqq \mu_r,\ \mu_1 + \cdots\cdots + \mu_r = n)$ ヲ考ヘル．タダシ $\alpha_1, \cdots\cdots, \beta, \cdots\cdots, \cdots\cdots$ ハ通常ナ順序デ $1, 2, \cdots\cdots, n$ ト一致スル．各々ノ tableau カラ各行ノ中ダケ或ハ各列ノ中ダケデ文字ヲウゴカス置換ヲ考ヘルコトニヨッテ對應スル巾等元ガ得ラレル．ソレラハ primitive デアル．更ニ T, T' ガ二ツノ tableau デシカモ互ニ單ニ文字ノ置換ガハ移レナイモノナラバ，即チ T' ニツイテスベテ (1) ヲ附ス時ニ $(\mu_1, \cdots\cdots, \mu_r)$ ト $(\mu'_1, \cdots\cdots, \mu'_{r'})$ トガ一致シナイナラバ，ソノ場合ニハ對應スル巾等元デツクラレルいでやるハ互ニ orthogonal デアル．而シテコレラノ事ヲ証明スルニハ，次ノ Neumann ノ Lemma ガ有效ニ使ハレル (Van der Waerden: Moderne Algebra II, 正田：抽象代數學, Weyl: Classical groups)

<u>Lemma</u>: $\mu_1-\mu'_1$. $\mu_2-\mu'_2$, ‥‥ ノ中デ<u>初メテ</u> 0 デナイモノガ正（コノ時 $T>T'$ トカク），或ハソウデナクトモ $\mu_1-\mu'_1$, $\mu_2-\mu'_2$, ‥‥ ガスベテ 0（$T\sim T'$）デアッテモ T カラ T' ガ先ヅ T ノ縦列中ダケデ文字ノウゴク置換ヲホドコシ更ニ今度ハ T ノ横行中ダケデ文字ノウゴク置換ヲホドコスコトニヨッテ得ラレナイナラバソノ場合ニハ必ズ T ノ中デハ同一ノ横行ニアリ，T' ノ中デハ同一ノ縦列ノ中ニアルヤウナ二ツノ文字ガ存在スル。

扨テ、コノ様ニシテ得ラレタ primitive ナ巾等元ニ對應スル既約表現ノ構造，即チカヽル巾等元デ生成サレタ左又ハ右いでやるノ構造ヲシラベヨウトスルト更ニ互ニ文字ノ置換デ移レルヤウナ，即チ互ニ $\sim$ ナ，tableau ノ間ノ関係モシラベナケレバナラナクナル。ソノタメ standard tableau ガ Young ニヨリ導入サレタ（Specht, Zeitschrift 38, 39 頃参照）

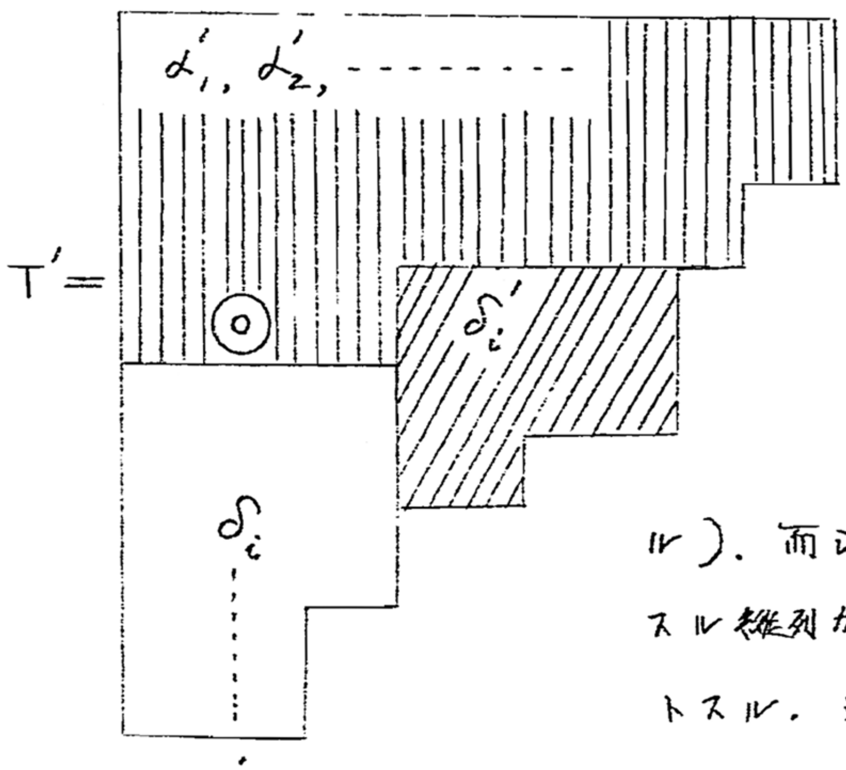
ソレハ各行各列ニオイテ數字ガ単調増加，即チ右下ニ行クホド大キクナッテヰル様ニ配置サレタ tableau ノコトデアル。ソウスルト或ル T ニ對應スル既約表現ノ次數ガ丁度 T ト $\sim$ ナ standard tableau ノ數ト一致シ，シカモソレ等 standard tableau カラ上記いでやるノアル基ガ実際ニ得ラレルノデアル。而シテコノコトハ Specht ハ計算的ニ出シテヰル。

コヽデ自分ガ注意シヨウトイフノハ、コノコトモ丁度上

ノ Lemma ト類似ノコトヲ standard tableau ノ間ニ証明シテ，ソレニヨツテ丁度同ジヤウニ多元数論的ニ議論ヲ進メルコトが出来ルトイフコトデアル。即チ

<u>Lemma</u>．T, T′ ヲ互ニ～ナ二ツノ standard tableau トスル．ソシテ $\alpha_1-\alpha'_1$，$\alpha_2-\alpha'_2$，......，$\beta_1-\beta'_1$，$\beta_2-\beta'_2$，.....（コノ順序デ）ノ中最初ニ 0 デナイモノが負デアルトスル．シカラバ T デハ同一ノ横行ニ T′ デハ同一ノ縦列ニアルヤウナ二ツノ数字が存在スル。

証明ハ簡単．初メテ 0 デナイモノが $\delta_i-\delta'_i$ デアルトスル．仮定ニヨリ $\delta_i<\delta'_i$ デアルカラ δ_i ナル文字ハ T′ ノ中デハ δ'_i ノ右下ニハアリ得ナイ。（T′ ハ standard）即チ下図ノ斜線///// ノ部分ニハナイ。更ニ $\delta_i-\delta'_i$ が 0 デナイノノ最初ダトイフコトカラ縦線||||| ノ部分ニモアリ得ナイ，即チ白イ部分ノドコカニアル（コノ事カラ先ヅ確カニ $i>1$ がワカル）．而シテ今，ソノ存在スル縦列が第 j 列デアルトスル．シカラバ図ノ◎印ノ所、即チ δ'_j ナル文字ヲ考ヘル．コンノ所ハ δ'_i ノ



トコロアリ，早イトコロデアルカラ假定ニヨリ $\delta_j=\delta'_j$ デアル。即チ δ_i ト $\delta_j=\delta'_j$ ナル二ツノ文字ハ T ノ中デハ同一ノ行（δ）ノ中ニアリ T′ ノ中デハ同一ノ列（第 j 列）ノ中ニアル。　終リ．

（或ヒハ上ノ Neumann ノ場合ニ帰着サセル証明モアルカモ知レナイ．而シテソウスレバ或ヒハモット standard tableau 間ノ関係ガハッキリ究明サレルカモ知レヌ）

コノ Lemma ヲツカフト、丁度 Neumann ノカタ～デナイ tableau ニ属スル巾等元カラツクラレタいでやるガ orthogonal ナコトガワカッタヤウニ、異ル standard tableau ニ属スル巾等元カラツクラレタ片側いでやるガミナ独立デアルコトガワカル。

而シテ group ring ノ構造ノ analysis ヲ完成スルタメニハ，コレ等ノいでやるノ和ガ group ring 全体ニナルコト，イハゞ completeness ヲ云ヘバヨイ。所ガ實ハコレガ難カシイ。現ニ Specht ノデモコレニ相當スル部分ハ全然別ニ一應對稱群ノ表現論ガスデニ與ヘラレテヰルトシテ、或ヒハ少クモソノ次數ノヨク知ラレタ値ガ知ラレテヰルモノトシテ、ソレニヨッテ一次独立ナ元ノ數ヲ上カラオサヘテ証明シテヰル．コゝデモ同ジヤウニ次數ガワカッテヰレバ、ソレカラ直チニ要求スル結果ガ出ル．即チ少クモ Specht ガ polynomial ノ計算デ出シテ居ル部分ニ相當スルコトハ上ノ Lemma ニヨル多元環論的考察デオキカヘルコトガ出來ルワケデアル。

（上ノイハバ completeness ノ方、即チ独立ノヲ上カラオサヘル方ニハドウモヤハリ例ノ行列式ノ公式ナドモ出テ来ル計算ガ要ルラシイ。實際、單ニ～デナイ tableau ニヨル表現デスベテノ表現ガツクサレルトイフコトノ証明（例ノ）ニサヘ conjugate classes ノ數ト tableau ノ數ノ比較云々トイフ幾分別ノ計算的方法ヲ使フワケダカラ今ノ場合ナホサラソレハ止ムヲ得ナイカモ知レナイ。然シ他方今ノ場合ハスッカリ独立ナ巾等元ガ construct 出来、ソシテ互ニ orthogonal ナ primitive ナ巾等元ノ System モ計算出来テヰルワケ（形ハ複雑ダガ）ダカラ、何カウマイ方法ガアッテモ良サソウニモ思ハナイコトモナイ）