880. 類体論ノ算術的証明（Chevalley ノ方法）

河田　敬義（東　大）
山本　逞（東大學生）

類体論ノ算術的証明ハ Chevalley ガ C. R. ニ 1935年ニ発表シタガ、詳シイ証明ハ略サレテアッタ。今回 "La théorie du corps de classes" (Annals of Math. 41 (1940)) (以後 Ann. トシテ引用) ニ於テイデヤルノ代リニ idèle ナル考ヘヲ用ヒテ丁寧ニソノ証明ヲ與ヘタ。丁度後期學生セミナーデ類体論ヲ末綱先生ニ指導シテ戴イテ居マシタノデ.（考ヘトシテハ寧ロ逆行デスガ）ソノ idèle ノ理論ヲ再ビイデヤル論ニシテ考ヘ直シテ見マシタノデ、其レニヨッテ Chevalley ノ方法ヲ御紹介シヤウト思ヒマス。

以下高木先生：代數的整数論ヲ（講座）トシテ、Chevalley ノ東大紀要ノ論文ヲ（紀要）トシテ引用シマス。

1

記号ノ説明：k ヲ有限次代數体，ソノ類數ヲ h，各類カラノ代表ヲ $\mathfrak{j}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{j}_h$。$K/k$ ヲ有限アーベル拡大，ソノガロア群ヲ $\mathfrak{G}(K/k)$，K ノ各類ノ代表ヲ $\mathfrak{J}_1, \cdots\cdots \mathfrak{J}_{h'}$ トスル。

M ヲ k ノ Primdivisor ノ有限箇ノ集リトスルトキ，k ノイデヤル $\mathfrak{a}$ ニ對シテ $\mathfrak{a}_M$ ナルイデヤルヲ次ノ如ク定

義スル。

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}\in M} \mathfrak{p}^{e} \cdot \prod_{\mathfrak{p}'\notin M} \mathfrak{p}'^{e'} \text{ナラバ } \mathfrak{a}_M = \prod \mathfrak{p}'^{e'}$$

即チ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}) = 1$, $\mathfrak{p} \notin M$ トナル。

k ノ Idealmodul $\mathfrak{m}$ ニ對シテ mod. $\mathfrak{m}$. ノ乘法群ヲ $\mathfrak{R}_m$ ト書ク。

A_m, S_m 等ハ例ノ通リ。

今 M ガ次ノ三種ノ素イデヤルハスベテ含ムモノトスル。

1) アル $\mathfrak{f}_i$ $(i=1, \cdots\cdots, k)$ ノ約數トナルモノ。

2) アル $N_{K_k} \mathfrak{F}_i$ $(i=1, \cdots\cdots, k')$ ノ約數トナルモ

3) $\mathfrak{p}_\infty$. サテ

$$\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}\in M} \mathfrak{p}^{e} \quad (e>0) \text{ トシテ } \mathfrak{R}_m \text{ カラ } A_m/S_m \text{ ヘノ}$$

homomorph ナ對應 φ ヲ次ノ如クニ定メル。

$k \ni \alpha \neq 0$ ノ mod. $\mathfrak{m}$ ノクラスヲ $\bar{\alpha}$ トスルト

$\varphi(\bar{\alpha}) = (\alpha)_M S_m$ トスル。コノ定義ガ意味ヲ持ツタメニハ、$\alpha \equiv \alpha'(\mathfrak{m})$ ナラバ $(\alpha)_M S_m = (\alpha')_M S_m$ デアレバヨイ。コレハ $\alpha^{-1}\alpha' \equiv 1\ (\mathfrak{m})$ カラ $(\alpha)_M^{-1} \cdot (\alpha')_M = (\alpha^{-1}\alpha')_M = (\alpha^{-1}\alpha') \in S_m$ カラワカル。

次ニ φ ハ $\mathfrak{R}_m$ ヲ A_m/S_m 全体ニ寫スコトハ，$A_m \ni \mathfrak{a}$ ニ對シテ $\mathfrak{a} = (\alpha)\mathfrak{j}_k$ トナルカラ，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_M = (\alpha)_M \mathfrak{j}_{k\,M} = (\alpha)_M$ カラワカル。

k ノ M−Einheit β トハスベテノ $\mathfrak{p} \notin M$ ニ對シテ

$((\beta), \mathfrak{p})=1$ ナルコトヽシ、M−Einheit ノ全体ヲ E^M（又ハ $E^M(k)$）ト書クコトニスル。

E^M ノ元デ代表サレルクラスヲ $\mathfrak{E}_m^M$ ト書ケバ

$$(4) \qquad \boxed{\mathfrak{R}_m / \mathfrak{E}_m^M \cong A_m / S_m}$$

$\varphi(\bar{\beta}) = S_m$ ハ明カデアルガ，逆ニ $\varphi(\bar{\alpha}) = S_m$ ナラバ $(\alpha)_M = (\alpha_1)$，$\alpha_1 \in S_m$ 即チ $(\alpha\alpha_1^{-1})_M = 1$ ナル故 $\alpha\alpha_1^{-1} = \beta \in E^M$，故ニ $\bar{\alpha} = \overline{\alpha_1\beta} = \bar{\beta}$.

故ニ $\varphi(\bar{\alpha}) = S_m$ ナラ $\bar{\alpha} \in \mathfrak{E}_m^M$ トナル。

H_m ヲ例ノ如ク $(\alpha_1) N_{K k} \mathfrak{a}$ $(\alpha_1 \equiv 1\ (m))$ ナル群トスレバ

$$(5) \qquad \boxed{\mathfrak{R}_m / \mathfrak{N}_m \cdot \mathfrak{E}_m^M \cong A_m / H_m}$$

コヽニ $\mathfrak{N}_m$ ハ mod. m ノ K/k ノノルム剰餘ノ群トスル。

（証） $\alpha \equiv N_{K k} A\ (m)$ ナラバ

$$(\alpha)_M S_m = (N_{K k} A)_M S_m = N_{K k} \cdot (A)_M,\ S_m \in H_m$$

コヽニ $\mathfrak{P} | \mathfrak{p} \in M$ ナル K ノ $\mathfrak{P}$ ノ全体ヲ M' トスル。（以後同ジ意味デ M' ナル記号ヲ使フ）

逆ニ $\mathfrak{a} \in H_m$ ナラバ，$\mathfrak{a} = (\alpha_1) N_{K k} \mathfrak{a}$ $(\alpha_1 \equiv 1\ (m))$

一方 M ノ 2）ノ假定カラ $\mathfrak{a} = (A)_{M'}$ ト書ケルカラ。

$$(\alpha)_M = \mathfrak{a} = (\alpha_1) N_{K k} \mathfrak{a} = (\alpha_1) \cdot N_{K k} (A)_{M'}$$
$$= (\alpha_1)_M (N_{K k} A)_M$$

故ニ (4) カラ $\alpha_1 N_{K k} A \cdot \alpha^{-1} = \beta \in E^M$，即チ

$$\bar{\alpha} = \overline{N_{K/k} A}\ \overline{\beta^{-1}} \in \mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m^M.$$

以下ノ証明デ (4) (5) ノ関係ハ基本的デアル。

2

$h_m(K/k) = (A_m : H_m)$ トスルト，$\mathfrak{G}(K/k)$ ガ zyklisch ノ場合ニ

(6) $h_m(K/k) \geqq (K : k) = n$

但シ m ハ適當ニ大キクエラブ。又逆ニソノ時

(7) $h_m(K/k) / n^s$ （s ハアル自然數）

ヲ証明スル。

(6) (7) ノ証明ハ（講座）ノ方法ヲ多少変形シテ次ノ通リ

先ヅ M ナル素イデヤルノ集リヲ 1) 2) 3) ノ外ニ 8) ノモモスベテ含ムモノトスル。

8) K/k デ分岐スルモノ。

$M \ni \mathfrak{p}$ ニ對シテ $\mathfrak{p}^c$ ヲ n 巾剰餘ノ臨界巾（以上）ニトル。即チ

$\alpha \equiv 1 \ (\mathfrak{p}^c)$ ナラバ　$\alpha \equiv \beta^n \ (\mathfrak{p}^r)$，$r = 1, 2, \cdots\cdots$

$m = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p}^c$ トオク。

（以後 $\mathfrak{p}^c$ ハスベテコノ意味ニ用ヒル。c : critical）

(5) カラ

(9) $(A_m : H_m) = (\mathfrak{K}_m : \mathfrak{N}_m \cdot \mathfrak{E}_m^M) = \dfrac{(\mathfrak{K}_m : \mathfrak{N}_m)}{(\mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{N}_m)}$

(10) シカルニ $(\mathfrak{N}_m : \mathfrak{n}_m) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} e_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}$ (講座197頁, Ann. p. 405), 且ツ $e_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p} / n$ ナル故 M ノ $\mathfrak{p}$ ノ数ヲ s トスレバ (9) カラ (9) ガ成立スル。

次ニ $\alpha \to \bar{\alpha}$ mod. $\mathfrak{m}$ ナル homomorph ナ對應ヲ考ヘレバ

(11) $$\left(E^M(k) : N_{Kk} E^{M'}(K)\right) = \left(\mathfrak{E}^M_m : N_{Kk}\mathfrak{E}^{M'}(K)\right)$$

$$\times \left(E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m\right)$$

$$= \left(\mathfrak{E}^M_m : \mathfrak{E}^M_m \cap \mathfrak{N}_m\right)\left(\mathfrak{E}^M_m \cap \mathfrak{N}_m : N_{Kk}\mathfrak{E}^{M'}(K)\right)$$

$$\times \left(E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m\right)$$

故ニ $(\mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m : \mathfrak{N}_m) = (\mathfrak{E}_m : \mathfrak{N}_m \cap \mathfrak{E}_m)$ カラ (11) ヲ (9) ニ代入スレバ

$$\left(E^M(k) : N_{Kk} E^{M'}(K)\right) = \frac{\prod_{\mathfrak{p} \in M} e_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}}{n} \quad (\text{Ann. p. } 408)$$

ト (10) ヲ用ヒテ

(12) $(A_m : H_m)$

$$= n \cdot \left(\mathfrak{E}^M_m \cap \mathfrak{N}_m : N_{Kk}\mathfrak{E}^{M'}(K)\right)\left(E^M(k) \cap S_m : N_{Kk} E^{M'}(K) \cap S_m\right)$$

トナリ、(6) ガ成立スル。

3

次ニ問題ノ中心デアル。

(13) $h_m(K/k) = (A_m : H_m) \leqq (K : k) = n$

ヲ一般ノアーベル体ノ場合ニ証明スル。

○第一段　K/k ヲアーベル擴大，$K \supset K' \supset k$ トスルト，m ヲ十分大ニトレバ

(14)　$h_m(K/k) \mid h_m(K/K') \cdot h_m(K'/k)$.

(証)　$A_m(K')/H_m(K/K')$ カラ $N_{K'k}$ ナル homomorph ナ對應 f ニヨリ $A_m(k)/H_m(K/k)$ ニ寫スト

$$\big(f(A_m(K')) : f(H_m(K/K'))\big) \,\big|\, \big(A_m(K') : H_m(K/K')\big),$$

$$左辺 = \big(H_m(K'/k) : H_m(K/K')\big) = \frac{(A_m(k) : H_m(K/k))}{(A_m(k) : H_m(K'/k))},$$

即チ(14)ガ成立スル。——

之レニヨッテ(13)ハ $(K:k)=p$ ガ素数ノ場合ニノミ証明スレバヨイ。

○第二段　$(K:k)=p$ トス。$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ トスルト

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] k(\zeta) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & K(\zeta) \arrow[d] \\ k \arrow[r, "p"'] & K \end{tikzcd}$$

$(k(\zeta):k) = d \mid p-1$, 故ニ(7)カラ

$(h(k(\zeta):k),\ p) = 1$.

又　$h(K/k) = p^u$.

故ニ(14)カラ

$$p^u = h(K/k) \mid h(K(\zeta)/k) \mid h(k(\zeta)/k) \cdot h(K(\zeta)/k(\zeta))$$

即チ　$h(K(\zeta)/k(\zeta)) = p$ ガ証明サレヽバ，ソレカラ $u=1$ トナリ，(13)ガ K/k デ成立スル。故ニ(13)ハ $K(\zeta)/k(\zeta)$ デ証明サレヽバヨイ。

即チ初メカラ $k \ni \zeta$ トスレバ，クンメル体 $K = k(\sqrt[p]{\beta_0})$ ノ場合ニ(13)ヲ証明スレバヨイコトニナル。コレハ今ニ見ル如ク從來ノ存在定理ノ証明ヲ變形シテ出来ル。

補助定理　Mヲ$s+1$箇ノ素イデヤルノ集リトシ、

15)　スベテノ $\mathfrak{p}_\infty$

16)　スベテノ $\mathfrak{p}|p$ ナル $\mathfrak{p}$

17)　スベテノ $\mathfrak{p}|\beta_0$ ナル $\mathfrak{p}$

18)　アル $\mathfrak{q}_i$ $(i=1,\cdots\cdots,h)$ ヲ割ル $\mathfrak{p}$, 及ビアル

$N_{K/k}\mathfrak{Q}_i$ $(i=1,\cdots\cdots,h')$ ヲ割ル $\mathfrak{p}$

ハスベテMニ含マレルモノトスル。

然ルトキハ $k(\sqrt[p]{\beta_0})/k$ デ分解スルMニ入ラヌ素イデヤル $\mathfrak{p}_1\cdots\cdots\mathfrak{p}_s$ ガアッテ

19)　$\theta\equiv\theta_{\mathfrak{p}}^{p}\ (\mathfrak{p}^{c})$, スベテノ $\mathfrak{p}\in M$

20)　$((\theta),\mathfrak{p})=1$, $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_i$, $\notin M$

ナラバ　$\theta=\theta_0^{p}$ トナル。　（θ等ハスベテkノ元, $\mathfrak{p}^{c}$ ハ p 巾剰餘ノ臨界巾）

コノ補助定理ヲ用ヒルト,

$$\mathfrak{m}=\prod_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p}^{c} \text{ トスレバ}$$

$$E^{M}\ni\alpha\equiv\beta^{p}(\mathfrak{m}) \text{ ナラバ } \alpha=\alpha_0^{p}$$

即チ　$\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M}\cap\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}^{p}=(\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M})^{p}$.

特ニ $\beta=1$ トスレバ　$E^{M}\cap S_{\mathfrak{m}}=(E^{M})^{p}\cap S_{\mathfrak{m}}$

故ニ（5）カラ

$$h(K/k)=(\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}:\mathfrak{N}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M})$$

$$=\frac{(\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}:\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}^{p}\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M})}{(\mathfrak{N}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M}:\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}^{p}\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M})}$$

$$(\mathfrak{R}_m : \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M) = \frac{(\mathfrak{R}_m : \mathfrak{R}_m^p)}{(\mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{R}_m^p)},$$

$$(\mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{R}_m^p) = (\mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{E}_m^M \cap \mathfrak{R}_m^p)$$

$$= (\mathfrak{E}_m^M : (\mathfrak{E}_m^M)^p) = (E^M : (E^M)^p),$$

$$(\mathfrak{R}_m : \mathfrak{R}_m^p) = p^{2(s+1)} \quad (\text{Ann. p. 409, 講座 p. 270})$$

$$(E^M : (E^M)^p) = p^{s+1} \quad (\text{Ann. p. 402}),$$

之レ等カラ

$$h(K/k) = \frac{p^{s+1}}{(\mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{R}^p \mathfrak{E}_m^M)}$$

トナル。

次ニ補助定理デトッタ $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_s\ (\nmid m)$ カラ $(\pi_i)_M = \mathfrak{p}_i = \pi_i\ (i=1, \cdots\cdots, s)$ ヲ選ブ。$\mathfrak{p}_i$ ハ K/k デ分解スルカラ K/k ノ Idealnorm, 即チ $\overline{\pi}_i \in \mathfrak{N}_m$ デアル。

$$\mathfrak{N}_m \mathfrak{E}_m^M \supset \mathfrak{N}_s - \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M \cdot \prod_{i=1}^{s} \overline{\pi}_i^{e_i} \text{ トオクト}$$

$$\overline{\pi} = \prod_{i=1}^{s} \overline{\pi}_i^{e_i} \in \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M$$

ナリトスレバ

$\beta \pi \equiv \gamma^p (m)$, $\beta \in E^M$ ナル $\beta, \gamma \in k$ ガアル。又 $(\beta\pi)_M = \prod \mathfrak{p}_i^{e_i}$ ナル故 $((\beta\pi), \mathfrak{p}) = 1$, $(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p} \nmid M)$.

故ニ補助定理カラ

$$\beta\pi = \pi_0^p$$

即チ　$\pi \mathfrak{p}_i^{e_i} = (\pi_0)^p_M$ トナリ p/e_i $(i=1,\cdots\cdots,s)$ トナル。

之レカラ　$(\mathfrak{R}_0 : \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M) = p^s$,

即チ　$(\mathfrak{R}_m \mathfrak{E}_m^M : \mathfrak{R}_m^p \mathfrak{E}_m^M) \geqq p^s$,

故ニ　$h(K/k) \leqq p$

ガ証明セラレタ。

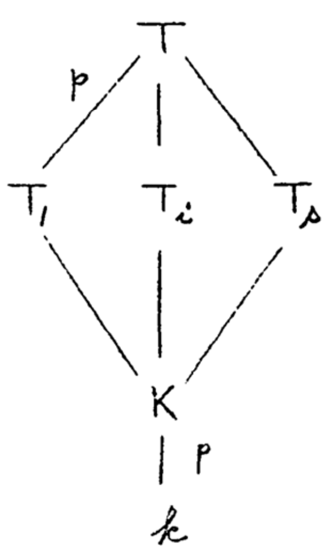
5

故ニ補助定理ヲ証明スレバヨイ。

E^M ニ含マレル Ordnung 有限ナル群 E_1 ハ k ノ 1 ノ巾根ヨリナル群デアル。假定カラ $E_1 \ni \zeta_p$.

故ニ E^M ハ s 箇ノ Erzeuge ヲ有スル freie abelsche gruppe ト E_1 トノ積トナル。(Ann. P. 402).

今 $\beta_0 \notin (E^M)^p$ ナル故, $E^M/(E^M)^p$ ハ $s+1$ 箇ノ生成元ヲ持ツ $(p,\cdots\cdots,p)$ 型ノ群デ、ソノ Basisklasse カラ $\beta_0, \beta_1, \cdots\cdots, \beta_s$ ヲトル。(β_0 ヲ含マスコトガ出来ル).



$T = k(\sqrt[p]{\beta_0}, \sqrt[p]{\beta_1}, \cdots\cdots, \sqrt[p]{\beta_s})$,

$T_i = k(\sqrt[p]{\beta_0}, \cdots\cdots \underset{i\text{欠}}{\updownarrow} \cdots\cdots \sqrt[p]{\beta_s})$ トスル。

§3 ノ $k \hat{=} n$ カラ T/T_i ナル巡回拡大デ分解シナイ T_i ノ素イデヤル $\mathfrak{p}^{(i)}$ ガ無限ニ沢山アルコトガ分ルカラ, $N_{T_i/k}\mathfrak{p}^{(i)} = \mathfrak{q}_i$ ガ M ニ入ラヌ様ニ $\mathfrak{p}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,s)$ ヲ取ル。

$\mathfrak{q}_i \notin M$ ナル故 $\mathfrak{q}_i$ ハ T/k デ分岐シナイ。(講座 P. 258)

又 T/k ノガロア群ハ $(p,\cdots\cdots,p)$ 型ナル故(講座 p.254)，$\mathfrak{p}_i$ ノ分解群ハ巡回群デナケレバナラヌカラ，$\mathfrak{p}_i$ ハ T_i/k デ完全ニ分解スル。故ニ特ニ K/k デ分解スル。

従ッテ

(21) $\quad \beta_i = \gamma_{ij}^{p} \quad (\mathfrak{p}_j^{c_j})\ (i=1,\cdots\cdots,s;\ i\neq j)$

ナル γ_{ij} ガ存在スル。(講座 p.258) 但シ β_i ハ mod. $\mathfrak{p}_i^{c_i}$ デハ p 巾剰餘トハナラナイ。何トナレバ其ノ場合ニ $\mathfrak{p}_i$ ハ T/k デ完全ニ分解シテシマフカラ。

サテ $k(\sqrt[p]{\Theta}) = Z$ ヲ考ヘル。目標ハ $Z = k$ デアル。

$(\theta) = \prod_{\mathfrak{p}\in E} \mathfrak{p}^{e} \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i^{f_i}$ ト分解スルト，$f_i \equiv 0\ (p)$ ナル $\mathfrak{p}_i$ ハ Z/k デ分岐シナイカラ(講座 p.258)，今 $f_1,\cdots\cdots,f_r \neq 0$，$f_{r+1},\cdots\cdots,f_s \equiv 0\ (p)$ トシテ，M' ヲ 15) — 18) デ定メタ M ノ他ニ $\mathfrak{p}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_r$ ヲカロヘタモノトスル。

$$m' = \prod_{\mathfrak{p}\in M} \mathfrak{p}^{c} \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{c_i} \quad \text{トオク。}$$

$Z = k$ ノ代リニ (5) カラ

(22) $\quad \mathfrak{H}_{m'} = \mathfrak{H}_{m'} \mathfrak{E}_{m'}^{M'}$

ヲ証明スレバヨイ。假定 (19) カラ $E \ni \mathfrak{p}$ ハ Z/k デ分解スル。之レカラ mod. m' ノクラス中 $\alpha \equiv 1\ (\mathfrak{p}_i^{l_i})\ (i=1,\cdots,r)$ デ代表サレルクラスハスベテ $\mathfrak{H}_{m'}$ ニ入ル。(講座 p.201)

次ニ $\beta_1,\cdots\cdots,\beta_s \in E^{M} \subset E^{M'}$ ナル故 $\bar{\beta}_i \in \mathfrak{E}_{m'}^{M'}$ トナル。

一方

$$\delta_{ij} \equiv \beta_i (p_j^{c_j}), \equiv 1 (p_k^{c_k}) \quad (k \neq j,\ k=1, \cdots\cdots, r)$$

$$\equiv 1 (p^c) \quad (p \notin M)$$

$= \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots\cdots, r)$ ヲ選ベバ，(21) カラ

$$\begin{cases} \delta_{ij} \equiv \gamma_{ij}^{p} (p_j^{c_j}) \quad (j=1, \cdots\cdots, r\ ;\ j \neq i) \\ \beta_i = \prod_{j=1}^{r} \delta_{ij} \ (m') \end{cases}$$

故ニ $\bar{\delta}_{ij} \in \mathfrak{H}'_m$ カラ $\bar{\delta}_{ii} = \bar{\beta}_i \prod_{j \neq i} \bar{\delta}_{ij}^{-1} \in \mathfrak{H}_{m'} \mathfrak{E}_{m'}^{M'}$ トナル。

サテ $p_i \ (i = 1, \cdots\cdots, r)$ ハ Z/k デ分岐スルカラ $(f_{\mathfrak{p}_i} - 1)$．(22) ノ証明ニハ $((\alpha), \mathfrak{p}_i) = 1,\ \alpha \equiv 1 \ (m' \mathfrak{p}_i^{-c_i})$ ニ對シテ

$$(23) \qquad \bar{\alpha} \in \mathfrak{H}_{m'} \mathfrak{E}_{m'}^{M'}$$

ヲ証明スレバヨイ。講座 P.215 (1))．然ルニ $((\alpha_i), \mathfrak{p}_i) = 1$ ニ対シテ $(\bar{\alpha}_i : \bar{\alpha}_i^{P}) = p(\mathfrak{p}_i \times p)$（講座 P.212，(7)，Ann. P.410)，且ツ $\bar{\delta}_{ii} \neq \bar{\alpha}_i^{P}$ ナル故

$$(\bar{\alpha}^{P})(\bar{\delta}_{ii}) = (\bar{\alpha})$$

トナル。上ニ $\bar{\delta}_{ii} \in \mathfrak{H}_{m'} \mathfrak{E}_{m'}^{M'}$ ヲ証明シタカラ，此レカラ (23) が成立スルコトがワカル。

6

以上デ巡回拡大デ基本定理 $h(K/k) = (K : k)$ が算術的ニ証明ヒラレタ。之レカラ後ハ Chevalley ノ紀要ノ方法

デ進メバヨイガ，Algebra ノ理論ガ自由ニ使フコトガ許サレルナラバ，Hasse ノ方法ノ方ガ自然デアルヤウニ思ハレル。

其ノタメニ先ヅ Normensatz：$\alpha \in k$ ガスベテ $\mathfrak{p}^c$ ニツイテ巡回拡大 K/k ノ Normenrest デアレバ，α ハ K/k ノ Norm トナル。

何トナレバ，巡回拡大ニ対シテ $h = n$ ガ成立シタカラ，(12) カラ

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_m \cap \mathfrak{N}_m = N_{K/k}\,\mathfrak{E}^{M'}(K), & (24) \\ E^M(k) \cap S_m = N_{K/k}\,E^{M'}(K) \cap S_m & (25) \end{cases}$$

ガ成立スル。今 $\mathfrak{p} / (\alpha)$ ナル $\mathfrak{p}$ ハスベテ M ニ入レテオケバ，

$$\alpha \in E^M.$$

假定カラ $\overline{\alpha} \in \mathfrak{E}^M_m \cap \mathfrak{N}_m$ ナル故 (24) カラ $\alpha \equiv N_{K/k} A\ (m)$,

$$A \in E^{M'}(K)$$

故ニ $\alpha N_{K/k} A^{-1} \equiv 1\ (m)$，$\alpha N_{K/k} A^{-1} \in E^M$ トナリ (25) カラ $\alpha N_{K/k} A^{-1} = N_{K/k} B$ トナル。即チ $\alpha = N_{K/k} AB$ トナル。————

故ニ Hasse ノ理論カラ（Math. Ann. 107）各 Primstelle $\mathfrak{p}$ ニ対シテ Normenrestsymbol

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) \quad (\alpha \in k)$$

ガアーベル擴大 K/k ニ對シテ定義サレ

$$(26) \quad \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \rightleftarrows \alpha \equiv N_{K/k} A\ (\mathfrak{p}^c), \quad A \in K$$

(27) $\mathfrak{p}$ガ K/k デ分岐シナケレバ，Artin Symbol $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ ニヨリ

$$\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{-e}, \quad \mathfrak{p}^{e} \| (\alpha)$$

トイシハサレル。

(28) Produktformel: $\prod_{\text{all } \mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)=1$

以上カラ $\bar{\alpha} \bmod. \mathfrak{m}$ ニ對シテ

$$\chi(\bar{\alpha})=\prod_{\mathfrak{p} \in M}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$$

ナル $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$ ノ in $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ對應ヲ考ヘルト，$\bar{\alpha} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}$，及ビ $\bar{\beta}$ ($\beta \in E^{M}$) ニ對シテハ(26)，(27)，(28) カラ（K/k デ分岐スル $\mathfrak{p}$ ハ M ニ入レテアルカラ）

$$\chi(\bar{\alpha})=\prod_{\mathfrak{p} \in M}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)=\prod_{\mathfrak{p} \in M} 1=1,$$

$$\chi(\bar{\beta})=\prod_{\mathfrak{p} \in M}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)=\prod_{\text{all } \mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \notin M}\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^{\nu}=1$$

即チ $\chi(\bar{\alpha})$ ハ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M}$ ノ in $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ homomorph ナ對應トナル。

一方 §1 デ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}^{M} \underset{\varphi}{\cong} A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ ナル関係ヲ立テタカラ，$A \ni \mathfrak{a}=\varphi(\bar{\alpha})=(\alpha)_{M}$ ニヨリ

$$\chi_{0}(\mathfrak{a})=\chi(\bar{\alpha})$$

ニヨッテ，$A_{\mathfrak{m}}$ ・ in $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ homomorph ナ對應ヲ考ヘレバ，コレガ $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ ノ in $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ homomorph ナ對應トナル。

今 $A_m \ni \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \notin M} \mathfrak{p}^e$ トスレバ，$\mathfrak{a} = (\alpha)_M$ ニ對シテ

$$\chi_0(\mathfrak{a}) = \chi(\bar{\alpha}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$$

$$= \prod_{\text{all } \mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) \prod_{\mathfrak{p} \notin M} \left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)^e = \left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right),$$

即チ $\chi_0(\mathfrak{a})$ ト一般ノ Artinsymbol $\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right)$ トガ一致スル。

χ 又ハ χ_0 ニヨリ $\mathfrak{G}(K/k)$ 全体ニウツサレルコトハ紀要 p. 427 參照。即チ Isomorphiesatz. χ_0 ト Artinsymbol トノ一致カラ Primideal ニツイテ考ヘレバ Zerlegungssatz.

ノ最後ニ存在定理ノ証明ハ §4, 5 ノ計算カラ講座ノ証明ハ若干簡易化サレル。

* * * *

Ideal ト idèle トノ関係，Ideal 群ト idèle ノ群トノ関係等ハ C. Chevalley: generalization de la théorie du corps de classes pour les extensions infinis (Liouvilles Journal (1936)) デ示サレテアル。以上ハソレニ頼ッテ idèle ノ理論ヲ普通ノ Ideal ノ話ニ飜譯シタノデアルガ，逆ニ以上ノ関係カラ Ideal ノ理論カラ idèle ヘノ移リ変リノ様子ガワカル。

即チ $\mathfrak{f}$ ナル對應デ與ヘラレル(3)ノ式デ M ニ含マレル $\mathfrak{p}$ ヲ次第ニ増シテ行ク。極限トシテスベテノ $\mathfrak{p}$ ヲ含ム様ニスレバ，E^M ハ k ノ元全体トナル。ソシテ $\mathfrak{N}_m$ ハ $m=\prod \mathfrak{p}^c$ ノ c ヲ順次ニ大ニスレバ，$\prod_{\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{p}}^*$ ヲ生ジ，groupe de fondamental J_k トナル。従ツテ $\mathfrak{N}_m$ ハ groupe de $\mathfrak{f}$ トシテノ Norm トナル。カクシテ

$$A_{\mathfrak{f}}/H_{\mathfrak{f}} \cong J_k/k\cdot N_{K/k}J_K$$

トナルコトガ推定サレル。

次ギニ $\mathfrak{N}_m/E_m^M\cdot\mathfrak{N}_m$ ノ $\mathfrak{G}(K/k)$ ヘノ Character χ：

$$\chi(\bar{\alpha})=\prod_{\mathfrak{p}\in M}\left(\frac{\alpha, Z}{\mathfrak{p}}\right)$$

デ $m\longrightarrow\infty$ トスレバ $J_k\ni\alpha=(\alpha_{\mathfrak{p}}, \alpha_{\mathfrak{p}_2} \cdots\cdots)$ ニ對シテ

$$\chi(\alpha)=\prod_{\mathfrak{p}_i}\left(\frac{\alpha_{\mathfrak{p}_i}, Z}{\mathfrak{p}}\right)$$

ト定義スレバヨイトイフコトガ想像サレル。実際ニ之レ等ノコトハ上ノ Chevalley ノ論文デ証明サレテヰル。