

881. 前号 浅野氏談話 878 = 関スル

— 注意 (部分体 / arithmetic = ツイテ)

中山 正 (阪大)

前号ヲ浅野氏ハ「アル体 K / 上 / normal-simple ナ多元環 \mathcal{A} / 中 / 「普通」 / arithmetic が成立シテキルナラバ K / 中 / アマハリソウデアル。」コトヲ証明サレタ。

ソコノ証明デアハ K / 中 = アル valuation がアルトキ、ソレガ \mathcal{A} デ「zerlegen」シタイトイフ normal-simple algebra = 特有ノ性質が使ハレテキルコトハ容易ニワカル。

シカラバソレハ方法的ナ問題カ、或ヒハ本質的ニ必要ナコトカ、即チ normal-simple デナイ場合、特ニ Extension field デアル場合ハ如何デアアルカ、ニツイテハ始メヨク介リマセンアシタ。然レコノ場合、實際駄目デアアルコトガ容易ナ例デ示サレタノデ一寸御報告シマス。

即チ、任意ノ体 k = ニツノ独立ナ変数 x, y ヲ添加シテ $K = k(x, y)$ ヲツクリ。更ニ \sqrt{x} ヲ添加シテ $L = K(\sqrt{x}) = k(\sqrt{x}, y)$ ヲツクリ。 L ハ K ノ二次ノ拡大体デアル。今 L / 中デ

$$O = k(y + \sqrt{x}) [y]$$

ナレ整域ヲモハル。 (角カッコハ環添加ヲ表ハス)

\mathcal{O} は \mathbb{C} の体 $k(\sqrt{x})$ 上、 y の多項式環 $k[x, y]$ である。この環は普通、arithmetic が成立つ。しかるに
 $\mathcal{O} \cap k = k$ の intersection は

$$\mathcal{O} \cap k = k[x, y]$$

である。よって $k[x, y]$ は普通、arithmetic が成立する。故に求める \mathcal{O} は $k[x, y]$ の intersection である。 (勿論 $k[x, y]$ は $k[x, y]$ の intersection である。)

$$K \cap \mathcal{O} \text{ は } F(x, y) / G(x, y) \text{ の形である。}$$

ここで $F(x, y), G(x, y) \in k[x, y]$ の元で、 $G(x, y) \neq 0$ である。このとき $F(x, y) / G(x, y)$ は $k[x, y]$ の元である。

$$F(x, y) / G(x, y) \in k[x, y] \text{ である。}$$

ここで $f(\sqrt{x}, y) \in k[\sqrt{x}, y]$, $g(\sqrt{x} + y) \in k[\sqrt{x} + y]$ である。しかるに $f(\sqrt{x}, y) / g(\sqrt{x} + y) \in k[x, y]$ である。故に $f(\sqrt{x}, y) = g(\sqrt{x} + y) \cdot h(x, y)$ である。

即ち

$$\frac{F}{G} = \frac{f}{g} \quad \text{即ち} \quad F \cdot g = f \cdot G$$

しかるに $F(x, y) \in k[x, y]$ と $G(x, y) \in k[x, y]$ である。故に $f(\sqrt{x}, y) \in k[\sqrt{x}, y]$ である。故に $f(\sqrt{x}, y) = g(\sqrt{x} + y) \cdot h(x, y)$ である。

$$F(x, y) = f(\sqrt{x}, y), \quad g(\sqrt{x} + y) = G(x, y)$$

トナル。シカル $= \sqrt{x} + y$ / 多項式が x, y / 多項式 = ナルノ、ハ常數ノ時カケデアル。故ニ我々ノ元、即チ $K \cap \mathcal{O}$ / 任意ノ元ハ x, y / 多項式 \in 左 $[x, y]$ トナル。g. e. d.

注意: 單ニ L/K / L = オイテ普通ノ arithmetic がアルバカリデナク、ソノ整域 \mathcal{O} が L/K = オケルソノ共軌ト一致スルナラバ $K \cap \mathcal{O}$ デ普通ノ arithmetic が成立ツコトハ大シク困難トシニシカル。之ガシコヨニ L/K ハ galoissch トスル。(拡大スレ方ハ arithmetic が保タレルコトガヨク知レテキルノガカラ、拡大スレ方ハヨイノデアリ、従ツテ galoissch ト仮定スルコトハ本質的ニハ何等影響ナイ。ソリデナイ場合ニ云ヒカヘルコトモ容易デアル)

[追記] ソレナラバ、 L/K ナル有限拡大体ニオイテ、 L / 整域 \mathcal{O} がアルトキ $\mathcal{O} \cap K$ デ普通ノ arithmetic が成立ツタメノ 必要且ツ充分 ナ条件ハ?

ソレハ、ノケヨカ上ニ最後ニ述ベタコトカラ直ッ出ルコトカガ、ソノタメニハ再ビ L/K が galoissch トシテ (上記注意参照) \mathcal{O} トソレノ共軌 $\mathcal{O}', \mathcal{O}'', \dots$ / Intersection $\mathcal{O}^* =$ オイテ普通ノ arithmetic が成立ツコトガ必要且ツ充分デアアル。

(証明) $\mathcal{O} \cap K = \mathcal{O}' \cap K = \mathcal{O}'' \cap K = \dots$ デアル。従ツテコレハ同時ニマタ $= \mathcal{O}^* \cap K$ デアル。今コヨデ普通ノ arithmetic が成立ツテキルトスレバ、 \mathcal{O}^* ノソレ (即チ $\mathcal{O}^* \cap K$) = 対シテ ganz-abhängig ナ L / 元全

体である。何トナラバ $\theta^* \cap K =$ 對シテ *ganz-abh.* ナ
 元ハ $\theta, \theta', \theta'', \dots =$ 對シテ然リ。シタガツテソレ等=
 即チ $\theta^* =$ 合マレル。他方 θ^* 元ノ共軛ノ整對稱式ハ
 $\theta^* \cap K =$ 合マレルコト明カダカラ θ^* 元ハ $\theta^* \cap K =$
 對シテ *ganz-abh.* デアル。ヨツテ θ^* デ普通ノ *arithmetic*
が成立ツ。

逆ハ上ニベタコトカラ明カ。 θ^* ハソノ共軛ト一致
 スルカラ。(コノ必要充分條件ヲ使ヘバ前記及例ノ別証ニ得
 ラレル。スナハチ、ソコノ θ トソノ共軛 θ' ノ *Inter-*
section ハソコノ論法ト類似ノ論法ヲ以テ $[\sqrt{x}, y]$ ナ
 ルコトガワカリ、ソコデハ普通ノ *arithmetic* が成立ス
 ナイ)。

ナホ、前ニ述べ且ツ上ニ使ツタ共軛ト一致スル場合云々
 ハ淺野サンハヤハリ前号 878 ト同ジ様ナ方法ヲ証明サレタ
 ガ、以下ニソノ別証ヲ述べテミル。

先ツ $\theta =$ オイテ普通ノ *arithmetic* が成立ツコトハ

1. L ノ中ニ適當ノ *valuations* ノ *system* \mathcal{G}_τ
 がアリ、 θ ガソノ *valuations rings* ノ
intersection .
2. \mathcal{G}_τ ハミナ *discrete* .
3. 任意ニ有限個ノ *Stellen* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ 及
 ビソレニ對應シテ L ノ元 a_1, \dots, a_n が與ヘラ
 レタトキ、 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n =$ オイテハ a_1, \dots, a_n
 ニ充分近ク、シカシテ他ノ *Stellen* 7 ハ *ganz*

= + 如キ L の数が存在スル。

ト同値デアル。(コノ formulation ハ Artin クラ聞
イタノデスが非常ニ便利デアル。特ニ拡大体 (下カラ上ヘ)
ヲ論バルトキ *idealthoretisch* ニヤルヨリハズツト
便利ノヤウニ思フ。トホ、カウシタ行キ方ノモット一般ノ場
合ニツイテハ守屋氏が北大紀要ニ書イテ居ラレル)。

ヨツテ今 \mathcal{O} がソノ共軛ト一致スレバ、アレ \mathcal{P}_c ト共軛
ノ valuation ハマハリ上ノ system ノ中ニフクマレ
テキルコトハ明カデアル。

更ニ $K = \mathcal{O}$ イテ \mathcal{P}_c デ induce サレタ valuations
ノ (中デ (本質的ニ) 異ルモノ) ナス system ϕ_α デ考
ヘル。ソレヲハ勿論 *discrete* ナカラ、ソレニツイテ
ニ相當スルコトが云ヘレバ目的が達セラレル。先ツ L/K が
separable ノ場合、コノ時 K ノ任意ノ元ハ L ノ元ノ
Spur デアル。

今一ツノ ϕ が興ヘラレタトキ、ソレヲ割ル (互ニ共軛
+) \mathcal{P} ニツイテ $\forall L$ ノ元ヲ適當ニ近似スレバソノ *Spur*
ハ興ヘラレタ K ノ元ニ ϕ デ充分近い。故ニ \exists ノ性質が
 $\{\phi_\alpha\}$ ニツイテ保持サレルコトが容易ニワカル。次ニ
rein-inseparabel ノ場合、 K ノ Characteristic
ヲ p 。シカレテ L ノ元ヲ p^e 乗スレバミナ K
入ルトスル。今 K ノ中ニ近似サルベキ n 個ノ元が興ヘラレ
タトシテ、ソレノ p^e 乗根ヲミナ $L =$ 添加シタ体 L^* ヲ考
ヘル。ココデ普通ノ *arithmetic* が成立ツテキル。ヨツ

テ、ソレヲ p^e 乗根ヲ L^* ノ中デ近似スレバヨイ、 (L^* 元
ハマハリ b^e 乗スレバミナ K ノ中ニ入ルコトニ注意セヨ)。
上記兩者ヲ合セレバ一般ノ場合ガ出来ル。