886. 高須博士ノ談話ニ関スル注意

浅野　啓三（阪大）

§1. 複素数 $x+hy$ ($h^2=1$) ノ函数論．複素数 $x+hy$ ノ Basis トシテ $1, h$ ノ代リニ $e_1=\frac{1+h}{2}$, $e_2=\frac{1-h}{2}$ ヲ用フル．然ラバ $e_1^2=e_1$, $e_2^2=e_2$, $e_1e_2=0$ トナリ，任意ノ元ハ xe_1+ye_2 (x, y ハ実数) ナル形デ表ハサレル。

$$z=xe_1+ye_2,\quad z'=x'e_1+y'e_2$$

トスレバ

$$z+z'=(x+x')e_1+(y+y')e_2,$$

$$zz'=xx'e_1+yy'e_2$$

故ニ $xy=0$ ナラバ Nullteiler デアルガ，$xy\neq 0$ ナラバ乗法ニ関スル逆元 $\frac{1}{z}=\frac{e_1}{x}+\frac{e_2}{y}$ ヲ有スル $F(z)$ ヲ z ノ有理函数トスレバ

$$F(z)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i z^i}{\sum_{k=1}^{n}\beta_k z^k}=\frac{\sum_i (a_ie_1+b_ie_2)(x^ie_1+y^ie_2)}{\sum_k (c_ke_1+d_ke_2)(x^ke_1+y^ke_2)}=f(x)e_1+g(y)e_2$$

$$f(x)=\frac{\sum_i a_ix^i}{\sum_k c_kx^k}\qquad g(y)=\frac{\sum_i b_iy^i}{\sum_k d_ky^k}$$

一般ニ函数 $F(z)=f(x,y)e_1+g(x,y)e_2$ ガ z ニ於テ微分可能ナラバ，即チ

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\quad(\Delta x\cdot\Delta y\neq 0)$$

ガ存在スルナラバ $\Delta x, \Delta y$ ガドノ様ニ 0 ニ tend シテモ

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x}.\quad \frac{g(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-g(x,y)}{\Delta y}$$

ガ夫々一定ノ極限値ヲ有スル　今 $f(x, y)$, $g(x, y)$ ガ (x, y) デ total differentierbar トスレバ

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\varepsilon\rho}{\Delta x}\quad(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},\ \varepsilon\to 0)$$

ガ一定ノ極限値ヲ有スルコトカラ $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 同様ニ $\frac{\partial g}{\partial x}=0$

$F(z)$ ガ domain D ノ各点デ上述ノ性質ヲ有スレバ f, g ハ夫々 x 及ビ y ノミノ函数ト考ヘラレル。ヨツテ

$$F(z)=f(x)e_1+g(y)e_2$$

逆ニ $f(x)$, $g(y)$ ヲ微分可能トスルトキ $F(z)=f(x)e_1+g(y)e_2$ ガ z ニ関シ微分可能ニナリ $\frac{dF(z)}{dz}=f'(x)e_1+g'(y)e_2$ トナル．カクテ z ノ函数論ハ一変数ノ実函数論ニ帰着セシメラレル。

§2. 複素数 $x+py$ $(p^2=0)$ ノ函数論、複素数 $z=x+py$ ノナス環ハ二次ノ行列

$$\begin{Vmatrix} x & 0 \\ y & x \end{Vmatrix}$$

ノナス環ト同型デアル。ヨツテ $|z|$ トシテハ行列ノ絶対値 $\sqrt{2x^2+y^2}$ ヲ用フルノガ適当デアロウ。$F(z)$ ヲ z ノ

Polynom トスレバ $p^2=0$ ヨリ

$$F(z)=F(x+py)=F(x)+pyF'(x)$$

$F(x)=f(x)+pg(x)$ トスレバ $F'(x)=f'(x)+p\,g'(x)$

$$F(z)=f(x)+(yf'(x)+g(x))\,p$$

上式ニ於テ一般ニ $f(x),g(x)$ ヲ夫々 $f''(x)$, $g'(x)$ ガ存在スル如キ x ノ実函数トスレバ $F(z)$ ハ z ニツイテ微分可能デアル。

何トナレバ

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=U+pV,\quad \Delta z=\Delta x+p\Delta y\ (\Delta x\neq 0)$$

$$U=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\longrightarrow f'(x)$$

$$V=\frac{(y+\Delta y)(f'(x+\Delta x)-f'(x))}{\Delta x}+\left(f'(x)-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=yf''(x)+\varepsilon+O(1)\Delta y+g'(x)+\varepsilon'\longrightarrow yf''(x)+g'(x)$$

$$\frac{dF(z)}{dz}=f'(x)+(yf''(x)+g'(x))\,p$$

次ニ $F(z)=f(x,y)+pg(x,y)$ ヲ z ノ任意ノ函数トシ，

f,g ガ共ニ *total differentierbar* デアルトスル。

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=U+pV$$

$$U=\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\nabla = \frac{g(x+\Delta x, y+\Delta y)-g(x,y)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x^2}\Delta y$$

F(z) ガ公ニツイテ *differentierbar* ナラバ先ヅ

$\frac{\partial f}{\partial y}=0$ デ f ハ x ノミノ函数トナル： $f(x, y) = f(x)$.

更ニ

$$\nabla = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\rho}{\Delta x} - \frac{\Delta x(f'(x)+\varepsilon')}{\Delta x^2}\Delta y$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial g}{\partial y} - f'(x)\right)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\varepsilon\rho}{\Delta x} - \frac{\varepsilon'\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta y = m\Delta x$ (m 一定) トシテ $\Delta x \to 0$ ナラシメテ ∇ ノ極限値ノ存在スルコトカラ $\frac{\partial g}{\partial y} - f'(x) = 0$. 故ニ

$$g(x, y) = yf'(x) + \varphi(x)$$

$$F(z) = f(x) + (yf'(x) + \varphi(x))p$$

トナル。コヽニ $f(x)$, $\varphi(x)$ ハ夫々 $f''(x)$, $\varphi'(x)$ ガ存在スル如キ x ノ実函数デアル。カクテ此ノ場合モ z ノ函数論ハ一変数ノ実函数論ニ帰セシメラレル。