887. Lie algebra ニ関スル Levi ノ定理

安倍 亮

§1. ハシガキ

$\mathfrak{R}$ ヲ Körper P ノ上ノ Lie-Algebra トスル。即チ $\mathfrak{R}$ ハ有限階ノ P-Modul:

$$\mathfrak{R} = Pu_1 + \cdots\cdots + Pu_r$$

デ $\mathfrak{R} \ni a, b$ ニ對シ，積 $a \circ b$ ガ定義サレ，コノ積ハ

1° $a \circ a = 0$

2° $a \circ (b \circ c) + b \circ (c \circ a) + c \circ (a \circ b) = 0$

3° $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \circ b = \alpha_1 (a_1 \circ b) + \alpha_2 (a_2 \circ b)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in P$

ヲ滿足スル。$\mathfrak{R}$ ハ Basis ノ積ノ式

$$u_i \circ u_j = \sum_k c_{ij}^k u_k, \quad c_{ij}^k \in P$$

デ完全ニ決ル。1°, 2° ニ照應シテ c_{ij}^k ハ

$$c_{ii}^k = 0, \quad c_{ij}^k = -c_{ji}^k,$$

$$\sum_t \left(c_{it}^s c_{jk}^t + c_{jt}^s c_{ki}^t + c_{kt}^s c_{ij}^t \right) = 0$$

ヲ滿足スル。

$\mathfrak{R}$ ノ P-Teilmodul $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$[1] ナルトキ，

---

1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ Teilmodul ナルトキ，$\sum a_i \circ b_i$ ($a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathfrak{b}$) ノ全体ヲ $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$，$a + b$ ($a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$) ノ全体ヲ $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ト書ク。

$\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ Teilalgebra, $\mathfrak{a}\circ\mathfrak{R}\subset\mathfrak{a}$ ナルトキ Ideal ト云フ。$\mathfrak{R}\supset\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}\circ\mathfrak{R}\supset\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}'\circ\mathfrak{R}'\supset\cdots\cdots$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ Ideal ノ減少列デアル。之レガ (0) ニ終ルトキ $\mathfrak{R}$ ハ"可解"デアルト云フ。$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ $\mathfrak{R}$ ノ可解 Ideal ナラ $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ モ可解 Ideal デアル。従ッテ $\mathfrak{R}$ ハ最大ノ可解 Ideal $\mathfrak{r}$ ヲ持ツ。$\mathfrak{r}$ ヲ Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ノ "Radikal" ト云フ。$\mathfrak{R}$ ノ mod $\mathfrak{r}$ ノ Restklassenalgebra $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ ハ (0) 以外ニ可解 Ideal ヲモタナイ。コノヤウナ Lie-Algebra ハ halbeinfach" デアルト云フ。

P ガ複素数ノバアヒニ Levi ハ次ノ定理ヲ証明シタ。

Levi ノ定理. Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ノ Radikal $\mathfrak{r}$ ニ関スル Restklassen ノ代表ガ, ソレ自身 Teilalgebra $\mathfrak{s}$ ヲナスヤウニトレル。即チ Modul トシテ $\mathfrak{R}=\mathfrak{r}+\mathfrak{s}$ (直和)。

$\mathfrak{s}\cong\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ ハ halbeinfach ナ Teilring デアルガ, 必ズシモ Ideal デハナイ。コノ定理ノ著シイ應用トシテハ, 任意ノ Lie 群芽ガ Lie 群ニ拡張デキル事ノ証明ニ此定理ガ使ハレル。[2)]

サテ, コノ定理ト全ク analog ナ定理ハ assoziative Algebra ノバアヒニモ成リ立ツ。[3)]

---

2) Pontrjagin: Topological groups, Chap. IX §54 参照。　3) 次頁へ

上ノ定理ノ中デ Lie-Algebra トアルカハリニ唯 Algebra ト書ケバヨイノデアル。assoziativ ノトキハ，$\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ ガ Grundkörper ヲ拡大シテモ常ニ halbeinfach デアリサヘスレバ定理ハ成立ツコトガ知ラレテヰル。例ヘバ Grundkörper P ガ vollkomen ナラインヽ。ソコデ Lie-Algebra ノバアヒニモ P ハモット一般ニ出来サウナモノダト考ヘラレル。Lie群トノ関係ハナクナルガ，代数ノ問題ニハナル。

Whitehead ハ Levi ノ定理ヲ P ガ複素数ノトキト實数ノトキト両方証明シテ居ル。[4] P ガ複素数ノトキノ証明ハ其ノマヽ P ガ任意ノ Charakteristik 0 ノ代数的閉体ノ場合ニ使ヘル。P ガ実数ノトキノ証明モレーすシタ注意ヲ附ケ加ヘレバ一般ノ Charakteristik 0 ノ Körper ノ場合ニ使ヘル。

assoziativ ノ場合カラ類推スレバ，Charakteristik $\neq 0$ デモ P ガ vollkommen ナラ定理ハ成立チサウナモノデアル。併シ halbeinfach ナ Lie Algebra ノ構造ノ議論ハ今マデノ所デハ Charakteristik 0 ノトキニシカ使ヘナイカラ，若シ本当ダトシテモ証明ハ大分様子ヲ変ヘナケレバナラナイデアラウ。

以下大体 Whitehead ノヤリ方ニ従ッテ，P ガ一般

---

3) 例ヘバ Deuring Algebren S. 23.

4) J. H. C. Whitehead: Proc. Cambr. Phil. So v. 32 (1936) p. 229

ノ標數0ノ体ノトキニLeviノ定理ヲ証明スル。

§2. Halbeinfache Lie-Algebra.

Pハ今後断ラナクテモ標數0トスル。Pノ上ノLie-Algebra $\mathfrak{N}$ ノ各元 a ニ有限階ノP-Modul $\mathfrak{M}$ ノ一次変換Aガ對應シテヰルトスル: $a \longrightarrow A$. コノ對應ガ

$$a \longrightarrow A,\ b \longrightarrow B \text{ ナラ } \alpha a+\beta b \rightarrow \alpha A+\beta B,$$
$$a \circ b \longrightarrow AB - BA = A \circ B$$

ヲ満足スルトキ, $a \longrightarrow A$ ヲ $\mathfrak{N}$ ノ表現ト云ヒ, $\mathfrak{M}$ ヲコノ表現ノDarstellungsmodulトイフ。特ニ $\mathfrak{M}$ トシテ $\mathfrak{N}$ 自身ヲトル, a ヲキメタトキ $a \circ x$ ハ x ニ對スル一次変換デ $a \circ x = Ax$ ト書ケル。$a \longrightarrow A$ ヲ $\mathfrak{N}$ ノ正規表現ト云フ。

$a = \alpha^i u_i$ [5] トシ, ソノ正規表現ヲ u_i ヲBasisトシテ行列トシテカケバ

$$A = \alpha^i U_i\ ,\quad U_i u_j = u_i \circ u_j = c_{ij}^k u_k,$$
$$\therefore\ U_i = \| c_{ij}^k \| \quad (c_{ij}^k \text{ ハ } k \text{行} j \text{列ノ元}).$$

$a = \alpha^i u_i$, $b = \beta^i u_i$ ニ對シ

$$\varphi(a, b) = \mathrm{Spur}\,(AB) = \alpha^i \beta^j\, \mathrm{Spur}(U_i U_j)$$
$$= g_{ij}\, \alpha^i \beta^j$$

---

5) 之レカラ先ハTensorノ記法ニ從ッテ, 上下ニアラハレル同ジIndexガアレバ, ソレラニツイテ加ヘルコトニスル。

ナル α, β ノ對稱双一次形式 φ ヲ考ヘル。

$$g_{ij} = S_p(U_i U_j) = C^{\alpha}_{i\beta} C^{\beta}_{j\alpha} = g_{ji}$$

Cartan ニ從ッテ

$\boxed{\mathrm{I}}$ Grundkörper P ガ Charakteristik 0 ナルトキ，$\mathfrak{R}$ ガ halbeinfach ナル必要十分條件ハ，φ ノ Diskriminante Det $\|g_{ij}\|$ ガ 0 デナイコトデアル。

從ッテ $\mathfrak{R}$ ガ halbeinfach ナラバ $\|g_{ij}\|$ ノ逆行列 $\|g^{ij}\|$ ガアル。

$$g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta^j_i, \quad g^{ij} = g^{ji}.$$

コノ g_{ij}, g^{ij} ヲ Metrik ノ基本 Tensor ノヤウニ考ヘテ，Vektor ヤ Tensor ノ Index ヲ上ゲタリ下ゲタリスルコトニスル。例ヘバ

$$C_{ijk} = C^{\alpha}_{ij} g_{\alpha k},^{6)} \quad C_{i\cdot\cdot}^{\ jk} = g^{j\alpha} C^{k}_{i\alpha}$$

$\boxed{\mathrm{II}}$ C_{ijk} ハ歪對稱 Tensor デアル（從ッテ $C^{\cdot k}_{ij} = C_{ij\cdot}^{\ \ k}$, $C^{ij}_{\cdot\cdot k} = -C^{ji}_{\cdot\cdot k}$ 等モ成立ツ）

證明．$C_{ijk} = g_{k\alpha} C^{\alpha}_{ij} = C^{\alpha}_{ij} S_p(U_k U_\alpha)$

$$= S_p(U_k C^{\alpha}_{ij} U_\alpha) = S_p(U_k (U_i \circ U_j))$$

$$= S_p(U_k U_i U_j) - S_p(U_k U_j U_i)$$

之レカラ容易ニ分ル。（終）

次ノ Lemma ハ後ニ用ヒル。

---

6) C^{k}_{ij} ノ k ノ位置ハ三番目ノ上，即チ $C_{ij\cdot}^{\ \ k}$ ト考ヘルノデアル。

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ $C_{l..}^{ij} C_{ij}^{k} = -\delta_l^k$

証明 $C_{l..}^{ij} C_{ij.}^{k} = C_{l..}^{ij} C_{ij\alpha} g^{k\alpha} = -C_{l..}^{ij} C_{\alpha ji} g^{k\alpha}$

$$= -C_{li}^{j} C_{\alpha j}^{i} g^{k\alpha}$$

$$= -g_{l\alpha} g^{k\alpha} = -\delta_l^k \qquad \text{(終)}$$

$\mathfrak{R}$ ノ一次変換 D ガ

(D): $D(x\circ y) = Dx\circ y + x\circ Dy$

ヲ満足スルトキ, D ヲ $\mathfrak{R}$ ノ "Ableitung" トイフ。特ニ $D_a x = a\circ x$ ハ Ableitung デアルガ, 之レヲ $\mathfrak{R}$ ノ innere Ableitung トイフ。次ノ定理ハ Cartan 以来ヨク知ラレテ居ル。

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ $\mathfrak{R}$ ガ halbeinfach ナラ, $\mathfrak{R}$ ノ Ableitung ハスベテ innere Ableitung デアル。[7)]

証明. D ヲ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Ableitung トスル。$\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} + Pd$ ヲ作リ $d\circ d = 0$, $d\circ x = Dx$, $x\in\mathfrak{R}$ ト定義スレバ, D ノ満足スル式 (D) ニヨリ $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ Lie-Algebra ニナリ, $\mathfrak{R}$ ハソノ halbeinfach ナ Ideal デアル。$\bar{\mathfrak{R}}' = \mathfrak{R} \neq \bar{\mathfrak{R}}$ ダカラ $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ halbeinfach デハナイ。[7a)] 故ニソノ Radikal $\mathfrak{r} \neq 0$. $\mathfrak{R} \frown \mathfrak{r}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ可解 Ideal ダカラ $=0$ ∴ $\mathfrak{R} + \mathfrak{r}$ ハ Ideal ノ直和デ且少クトモ $\mathfrak{R}$ ヨリ階数ガ 1 大キイカラ $\bar{\mathfrak{R}}$ ニ一致スル $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} + \mathfrak{r}$。$\mathfrak{r}$ ハ一次元ダカラ $\mathfrak{r} = (r)$, $r = \alpha d + b$, $b\in \mathfrak{R}$; $\mathfrak{r} \not\subset \mathfrak{R}$ ダカラ $\alpha \neq 0$,

---

7) P ガ complex ノトキハ Cartan ノ Thèse p. 113 ノ

7a) $\bar{\mathfrak{R}}$ ガ halbeinfach ナラ, $\bar{\mathfrak{R}}' = \bar{\mathfrak{R}}$.

$\therefore\ a = -\alpha^{-1} b$ トオクトスレ $= (d-a),\ a \in \mathfrak{R}$ ノ形ニナル。$\mathfrak{R}$ ノ任意ノ元 x ハ $\mathfrak{S}$ ト直交ダカラ,

$(d-a)\circ x = 0$ 即 $a \circ x = d \circ x = Dx$. 故ニ $D = D_a$ デ innere Ableitung ニナル。 (終)

次ニ Charakteristik 0 ノ代数的閉体 P ノ上ノ halbeinfach ナ Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ノ構造ニ関シテ、必要ナ結果ヲ掲ゲテオク。[8)]

$\boxed{\text{III}}$ $\mathfrak{R}$ ニ次ノヤウナ Basis $h_1, \cdots\cdots h_n,\ e_\alpha,\ e_{-\alpha}, \cdots\cdots$ ヲトルコトガデキル。

$$\mathfrak{R} = Ph_1 + \cdots\cdots + Ph_n + Pe_\alpha + Pe_{-\alpha} + Pe_\beta + Pe_{-\beta} + \cdots\cdots + Pe_\rho + Pe_{-\rho}$$

$$h_i \circ h_j = 0 \quad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

$h_\lambda = \sum \lambda_i h_i$ トオクトキ

$$h_\lambda \circ e_\alpha = (\alpha, \lambda)\, e_\alpha \qquad (\alpha, \lambda) = \sum \alpha_i \lambda_i \quad \alpha_i \text{ ハ有理数}^{9)}$$

$$h_\lambda \circ e_{-\alpha} = -(\alpha, \lambda)\, e_{-\alpha}$$

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = -\sum \alpha_i h_i$$

$S = h_\lambda + \sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_{-\alpha} e_{-\alpha} + \cdots\cdots + \sigma_{-\rho} e_{-\rho}$ ニ對シ

$$\varphi(S, S) = (\alpha, \lambda)^2 + \cdots\cdots + (\rho, \lambda)^2 - 2\sigma_\alpha \sigma_{-\alpha} - \cdots\cdots \cdots\cdots - 2\sigma_\rho \sigma_{-\rho}$$

$(\alpha, \lambda), \cdots\cdots, (\rho, \lambda)$ ノ中一次独立ナモノガ丁度 n 個ア

---

8) 例ヘバ吉田氏: クー環論.

9) Charakteristik 0 ノ Körper P ハ有理数体ニ同型ナ Primkörper ヲ含ム, ソノ元ヲ簡単ニ「有理数」ト云フコトニスル。

ル。從ツテ $h_1, \cdots\cdots, h_n$ ニ更ニ適當ナ有理係數ノ一次変換ヲ施シテ

$$\varphi(s, s) = g_1\lambda_1^2 + \cdots\cdots + g_n\lambda_n^2 - 2\sigma_\alpha\sigma_{-\alpha} - \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots - 2\sigma_\rho\sigma_{-\rho} \quad (g_i \text{ ハ正ノ有理數})$$

ノ形ニシテアルモノトシテヨイ。

最後ニ標數 0 ノ代數的閉体 P ノ上ノ *halbeinfach* ナ *Lie Algebra* $\mathfrak{R}$ ノ P ニオケル表現 $a \to \overline{A}$ ガアルトキ：

$\boxed{\text{IV}}$ *Teilalgebra* $(h_1, \cdots\cdots, h_n)$ ノ元 $h_\lambda = \sum \lambda_i h_i$ ニ對應スル *Matrix* $\overline{H}_\lambda$ ノ *Eigenwerte* ハスベテ $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ ノ一次形式

$$\Lambda^{(k)}(h_\lambda) = (\Lambda^{(k)}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i^{(k)} \lambda_i, \quad k = 1, 2, \cdots\cdots, g \quad (g \text{ ハ } \overline{H} \text{ ノ次數})$$

デ，シカモ係數 $\Lambda_i^{(k)}$ ハスベテ有理數デアル。特ニ $h_i \to \overline{H}_i$ ナラ

$$S_p(\overline{H}_i^2) = \sum_{k=1}^{g} (\Lambda_i^{(k)})^2 \quad \text{ハ有理數} \geqq 0$$

又 $e_\alpha \to \overline{E}_\alpha$ ニ對シテハ $S_p(\overline{E}_\alpha \overline{E}_{-\alpha})$ ハ有理數 $\leqq 0$ [10)]

§3. Casimir 行列

標數 0 ノ体 P ノ上ノ *halbeinfach* ナ *Lie algebra* $\mathfrak{R}$ ノ P ニオケル表現 $\vartheta: a \to \overline{A}$ ガアルトスル。$\mathfrak{R}$ ノ *Basis* $u_i \to \overline{U}_i$. コノ u_i ニ關シテ g_{ij}, g^{ij} ヲ計

算シ

$$C = g^{ij}\overline{U}_i\overline{U}_j = \overline{U}_i\overline{U}^i = \overline{U}^j\overline{U}_j \qquad (\overline{U}^i = g^{i\alpha}\overline{U}_\alpha)$$

ナル行列ヲ作ル。形カラ明カナヤウニ $\mathfrak{R}$ ノ Basis $\{u_i\}$ ノトリ方ニハ無関係ニ決ル。[10a] 之ヲ表現 ϑ ノ Casimir 行列ト云フ。

$\boxed{\text{V}}$.（Casimir ノ定理）ϑ ノ Casimir 行列 C ハ表現ノ任意ノ Matrix $\overline{A}$ ト可換デアル:

$$C\overline{A} = \overline{A}C$$

証明: $C\overline{U}_k = \overline{U}_k C$ ヲ云ヘバヨイ.

$$\overline{U}_i\overline{U}_k = \overline{U}_i \circ \overline{U}_k + \overline{U}_k\overline{U}_i = C_{ik}^j\overline{U}_j + \overline{U}_k\overline{U}_i =$$

注意スレバ

$$C\overline{U}_k = \overline{U}^i\overline{U}_i\overline{U}_k = C_{ik}^j\overline{U}^i\overline{U}_j + \overline{U}^i\overline{U}_k\overline{U}_i$$

$$= C_{ikj}\overline{U}^i\overline{U}^j + \overline{U}_j\overline{U}_k\overline{U}^j$$

$$= C_{ikj}\overline{U}^i\overline{U}^j + C_{jk}^i\overline{U}_i\overline{U}^j + \overline{U}_k\overline{U}_j\overline{U}^j$$

$$= (C_{ikj} + C_{jki})\overline{U}^i\overline{U}^j + \overline{U}_k C = \overline{U}_k C \quad \text{(終)}$$

$\boxed{\text{VI}}$ ϑ ガ零表現デナイナラ, $Sp(C)$ ハ正ノ有理数デアル。[11]

証明. $\mathfrak{R}$ ノ Basis トシテ III ノ $h_1, \cdots, h_n, e_\alpha, \cdots, e_{-\rho}$ ヲ用ヒレバ

---

10) リー環論: 31頁.

10a) 表現加群ノ Basis ノ取方ニハ関係スル。

11) リー環論: 33頁, P ガ複素数ノトキ $Sp(C)$ ガ正ノ実数ニナルコトハ証明シテアル。有理数ニナルコトモ Whitehead, l.c. ニ証明ガアルカヨク分ラナイ。

$\therefore \varphi(S,S) = g_1\lambda_1^2 + \cdots + g_n\lambda_n^2 - 2\sigma_\alpha\sigma_{-\alpha} - \cdots - 2\sigma_\rho\sigma_{-\rho}$

ダカラ

$$C = \frac{1}{g_1}\overline{H}_1^2 + \cdots + \frac{1}{g_n}\overline{H}_n^2 - 2E_\alpha E_{-\alpha} - \cdots - 2E_\rho E_{-\rho}$$

g_i ハ正ノ有理數，又IV＝ヨリ $Sp(\overline{H}_i^2)$ ハ有理數$\geqq 0$。$Sp(\overline{E}_\alpha \overline{E}_{-\alpha})$ ハ有理數$\leqq 0$ ダカラ $Sp(C)$ ハ有理數$\geqq 0$ デアル。$Sp(C)$ ガ實際正ナルコトヲ云フニハ $Sp(\overline{H}_i^2)$ ノ中少クトモ一ツ0デナイモノガアルコトヲ云ヘバヨイ，ソレニハアル $\overline{H}_i$ ノ少クトモ一ツノ固有値ガ0デナイコトヲ云ヘバヨイ。實際 $\overline{H}_1, \cdots, \overline{H}_n$ ノ固有値ガ全部0デアレバ，スベテノ $\overline{E}_\alpha = 0$ ナルコトガ云ヘ，$-\sum \alpha_i \overline{H}_i = \overline{E}_\alpha \circ \overline{E}_{-\alpha} = 0$ カラ $\overline{H}_i = 0$ スナハチ ϑ ガ零表現トナルコトガ証明デキルノデアルガ，ソレハ「リー環論」34頁ニ譲ルコトニスル。

以上ハ§2ノIII，IVヲ使ッテキルタメニPガ代數的閉体デナケレバナラナイ。

若シPガ代數的閉体デナイナラバ P^* ヲPノ上ノ代數的閉体トシ，$\mathfrak{K} = Pu_1 + \cdots + Pu_r$ カラ，P^* ノ上ノ halbeinfach ナ Lie algebra $\mathfrak{K}^* = P^*u_1 + \cdots + P^*u_r$ ヲ作リ，同時ニ $\mathfrak{K}$ ノ P ニオケル表現

$$\vartheta:\ \alpha^i u_i \longrightarrow \alpha^i \overline{U}_i,\ \alpha_i \in P$$

ヲ $\mathfrak{K}^*$ ノ P^* ニオケル表現

$$\vartheta^*:\ \alpha^{*i} u_i \longrightarrow \alpha^{*i}\overline{U}_i,\ \alpha^{*i} \in P^*$$

ニ拡張スル。定義カラ ϑ^* ノ Casimir 行列 C^* ハ，ϑ ノ

Casimir 行列Cト一致スル。$S_p(C^*)$ガ正ノ有理数ナルコトハ証明シタカラ，$S_p(C)$モ正ノ有理数デアル。(終)

$\boxed{\text{VII}}$ ϑガ絶對既約表現ナラ，ϑノ Casimir 行列 C ハ

$$C = cE, \quad c\ \text{ハ正ノ有理数}$$

ノ形デアル。cハ表現類ニ固有ナ一ツノ常数。

証明. Cハ∇ニヨリ，絶對既約ナ行列ノ System ト可換ダカラ，Schur ノ Lemma ニヨリ，$C = cE$ノ形ニナル。ϑノ次数ヲgトスレバ

$S_p(C) = gc =$ 正ノ有理数，故ニ c モ正ノ有理数デアル。(終)

上ノ定理ハ実ハ絶對既約デナク，単ニPニオケル既約表現デモ成立ツ。之レガ後ニ必要ニナル Lemma デアル。

$\boxed{\text{Lemma 3}}$ Pハ標数0ノ任意ノ体，$\mathfrak{K}$ハPノ上ノ halbeinfach ナ Lie algebra，ϑヲ$\mathfrak{K}$ノPニオケル既約表現，$C = C_\vartheta$ヲϑノ Casimir 行列トスル。コノトキ

$$C = cE$$

ノ形ニナリ，$c = c_\vartheta$ハϑノ表現類ニ固有ナ一ツノ正ノ有理数デアル。

証明. ϑノ Darstellungsmodul ヲ$\mathfrak{M}$トスル。$\mathfrak{M}$ノ係数ヲPノ上ノ代数的閉体P^*マデ拡張シ$\mathfrak{M}_{P^*}$トシ，$\mathfrak{M}_{P^*}$ニ含マレル一ツノ既約ナ Darstellungsmodul ヲ

$\mathfrak{m}^*$ トスル。$\mathfrak{m}^*$ ノ Basis ヲ $\mathfrak{M}$ ノ Basis ノ一次結合トシテアラハストキ出テ來ル係數ヲ含ム P ノ有限次 galois 擴大体ヲ Γ トスレバ, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}_\Gamma \frown \mathfrak{m}^*$ トスルト $\mathfrak{m}^* = P^*\mathfrak{m}$ デ, 從ツテ $\mathfrak{m}$ ハ絶對既約ナ Darstellungsmodul デアル。Γ/P ノ galois 群ヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ, $\sigma \in \mathfrak{G}$ ヲ係數ニ作用サセルコトニヨリ, $\mathfrak{M}_\Gamma$ ノ Automorphismus σ ガデキル。$\mathfrak{m}^\sigma$ ハスベテ絶對既約デ, $\sigma, \tau \in \mathfrak{G}$ ナラ $\mathfrak{m}^\sigma = \mathfrak{m}^\tau$ 若クハ $\mathfrak{m}^\sigma \frown \mathfrak{m}^\tau = 0$。$\mathfrak{m}^\tau = \mathfrak{m}$ ナル τ ノ全体ハ $\mathfrak{G}$ ノ部分群 $\mathfrak{g}$ ヲ作ル。

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}\sigma_1 + \mathfrak{g}\sigma_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{g}\sigma_j, \quad \sigma_1 = 1$$

各剩群 $\mathfrak{g}\sigma_i$ ニ $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}^{\mathfrak{g}\sigma_i} = \mathfrak{m}^{\sigma_i}$ ガ對應シ, $i \neq k$ ナラ $\mathfrak{m}_i \frown \mathfrak{m}_k = 0$.

故ニ $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{m}_j$ ハ直和デ, 且ツ $\mathfrak{n}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノスベテノ Automorphismus デ不変ダカラ $\mathfrak{n} = \Gamma(\mathfrak{n} \frown \mathfrak{M})$ $\mathfrak{n} \frown \mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{M}$ ニ含マレル Darstellungsmodul $\neq 0$ デアル。故ニ $\mathfrak{M}$ ノ既約性カラ $\mathfrak{n} \frown \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ $\therefore \mathfrak{n} = \mathfrak{M}_\Gamma$ 即チ:

$$\mathfrak{M}_\Gamma = \mathfrak{m}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{m}_j$$

ノ如ク互ニ共軛ナ絶對既約ナ Darstellungsmodul ノ和ニ分レル。$\mathfrak{m}_1 = (v_1, \cdots\cdots, v_m)$ ニ對シ $\mathfrak{m}_i = (v_1^{\sigma_i}, \cdots\cdots, v_m^{\sigma_i})$ ナル Basis ガトレルカラ, コノ Basis ニ就イテ表現ノ行列ヲ書クト[12], $\vartheta : a \longrightarrow \bar{A}$ ハ Γ ニ於テ

12) C ハ一般ニハ Darstellungsmodul ノ Basis ノ取方ニヨリ変ルガ, 今ノバアヒハ結果カラ云ッテ変ラナイカラ, ドノヤウナ Basis ノ取方ヲシテ証明シテモヨイ。

$$a \longrightarrow \begin{vmatrix} \bar{A}_1 & & & \\ & \bar{A}_1^{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{A}_1^{\sigma_f} \end{vmatrix} \qquad (a \longrightarrow \bar{A}_1 \text{ ハ絶對既約})$$

ト zerfallen スル。從ッテ絶対既約表現 $a \longrightarrow \bar{A}_1$ ノ Casimir 行列ヲ $C_1 = c_1 E$ トスレバ

$$C_\mathfrak{g} = \begin{vmatrix} c_1 E & & & \\ & c_1^{\sigma_2} E & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_1^{\sigma_f} E \end{vmatrix}$$

c_1 ハ VII ニ依ッテ Γ ノ Primkörper ノ元デアル，從ッテ P ニモ含マレ $c_1 = c_1^{\sigma_2} = \cdots\cdots = c_1^{\sigma_f} = c$.

$$\therefore \quad C_\mathfrak{g} = cE$$

$c = c_1$ ハ正ノ有理數。 (終)

§4. Levi ノ定理ノ証明.

$\boxed{\text{定理}}$ $\mathfrak{L}$ ヲ標数 0 ノ体 P ノ上ノ Lie Algebra トスル。$\mathfrak{L}$ ハ Radikal $\mathfrak{r}$ ト halbeinfach ナ Teilalgebra $\mathfrak{s}$ トノ（Modul トシテノ）直和ニナル。

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$$

証明.

(I) 先ヅ $\mathfrak{r}$ ガ可換デ而モ (0) ト $\mathfrak{r}$ 以外ニ $\mathfrak{L}$ ノ Ideal ヲ含マナイトキニ定理ヲ証明スレバ一般ノ場合モソレカラ容

易ニ出ルコトヲ示ス。

一般ノ$\mathfrak{R}$ガ與ヘラレタトキ，$\mathfrak{R}$ノIdealノ列

$$\mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}' \supset \mathfrak{n}'' \supset \cdots\cdots \supset \mathfrak{n}^{(s)} = (0)$$

ヲ，出来レバ更ニ verfeinern シテ，$\mathfrak{R}$ヲ Operator トスル Kompositionsreihe $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \supset \mathfrak{n}_1 \supset \cdots\cdots \supset \mathfrak{n}_c = 0$ ヲ作ル。$\mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_{i+1}$ ハ可換デアル。$c=1$ ノトキ定理ガ証明デキタトシテ，任意ノ c ニ就テ証明デキルコトヲ云ヘバヨイ。c 以下デハ既ニ云ヘタトスル。

$\mathfrak{R}/\mathfrak{n}_1$ ハ $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1$ ヲ Radikal トシ従ッテ $c=1$ デアルカラ，$\mathfrak{R}/\mathfrak{n}_1$ ノ halbeinfach ナ Teilalgebra $\mathfrak{s}_1/\mathfrak{n}_1$; ($\mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{n}_1$) ガアリ $\mathfrak{R}/\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{s}_1/\mathfrak{n}_1$ 即チ $\mathfrak{R} = (\mathfrak{n}, \mathfrak{s}_1)$ デ $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{n}_1$。$\mathfrak{n}_1$ ハ $\mathfrak{s}_1$ ノ Radikal デアル。$\mathfrak{n}_1$ ノ Kompositionsreihe ノ長サハ高々 $c-1$ デアルカラ $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{s}$ ナル $\mathfrak{s}_1$ ノ Teilalgebra $\mathfrak{s}$ ガアリ $\mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{s} = 0$ $\quad \therefore\ \mathfrak{R} = (\mathfrak{n}, \mathfrak{s}_1) = \mathfrak{n} + \mathfrak{s}$

(II) $\mathfrak{R} = (u_1, \cdots\cdots, u_r, v_1, \cdots\cdots, v_g)$, $\mathfrak{n} = (v_1, \cdots\cdots, v_g)$; $\mathfrak{n}$ ハ可換デ且 $\mathfrak{R}$ ノ Ideal ヲ含マナイトスル。

$$u_i \circ u_j = c^k_{ij}\, u_k + a^\alpha_{ij}\, v_\alpha, \quad u_i \circ v_\alpha = h^\beta_{i\alpha}\, v_\beta,$$
$$v_\alpha \circ v_\beta = 0.$$ [13]

u_i ノ mod $\mathfrak{n}$ ノ Klasse ヲ $\bar{u}_i$ トセバ $\bar{u}_i \circ \bar{u}_j = c^k_{ij}\, \bar{u}_k$

---

13) u ノ suffix $1, \cdots\cdots, r$ ハローマ字デ，v ノ suffix $1, \cdots\cdots, g$ ハギリシャ字デアラハス。

デアッテ，$\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ハ halbeinfach ダカラ，$g_{ij}=c_{il}^{k}c_{jk}^{l}$ ガ ausarten セズ，從ッテ g^{ij} ヲ作ッテ Index ヲ上下スルコトが出來ル。又 $\mathfrak{v}$ ヨ $\mathfrak{v}$ ニ對シテハ r。$v_\alpha=0$ ダカラ

$$\overline{u}_i \circ v_\alpha = h_{i\alpha}^{\beta} v_\beta$$

ト書イテヨイ。$\vartheta: \overline{u}_i \longrightarrow \overline{U}_i=\| h_{i\alpha}^{\beta} \|$ ハ halbeinfach ナ Lie algebra $\overline{\gamma}=\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{v}$ ヲ Darstellungsmodul トスル表現デアル。$\mathfrak{v}$ ハ $\mathfrak{R}$ ヲ Operator トシテ einfach，即チ表現 ϑ ハ既約表現デアル。

問題ハ $\overline{u}_i$ ノ代表トシテ u_i ノ代リニ適當ナ $u_i^*=u_i+t_i^\alpha v_\alpha$ ヲトッテ，a_{ij}^{α} ノ如キ係數ヲナクスルコトデアル。

$$u_i^* \circ u_j^* = c_{ij}^{k} u_k^*$$

$$\begin{aligned} u_i^* \circ u_j^* &= (u_i+t_i^\alpha v_\alpha)\circ(u_j+t_j^\alpha v_\alpha) \\ &= c_{ij}^{k} u_k + a_{ij}^{\beta} v_\beta + h_{i\alpha}^{\beta} t_j^\alpha v_\beta - h_{j\alpha}^{\beta} t_i^\alpha v_\beta \\ &= c_{ij}^{k} u_k^* + (a_{ij}^{\beta} + h_{i\alpha}^{\beta} t_j^\alpha - h_{j\alpha}^{\beta} t_i^\alpha - c_{ij}^{k} t_k^\beta) v_\beta \end{aligned}$$

デアルカラ

$$(1)\quad a_{ij}^{\beta} + h_{i\alpha}^{\beta} t_j^\alpha - h_{j\alpha}^{\beta} t_i^\alpha - c_{ij}^{k} t_k^\beta = 0,$$

$$1 \leqq i, j \leqq r,\ 1 \leqq \beta \leqq g$$

ナル $r^2 g$ ケノ方程式ヲ滿足スルヤウニ，rg 個ノ係數 t_k^β ヲ決メルトイフ問題ニナル。

(III) ϑ が零表現ナルトキ。既約表現ダカラ次數 $g=1$ デアル。故ニ v ノ Index ハ書カナイコトニスレバ，(1) ハ

$$(2)\quad a_{ij}=c_{ij}^{\ \ k}t_k, \qquad 1\leqq i,j\leqq r$$

ナルr^2ケノ式ニナル。之レカラrケノt_kガ解ケルナラバ、Lemma 1ニヨリ

$$t_l=\delta_l^k t_k=-c_l^{\cdot ij}c_{ij}^{\ \ k}\cdot t_k=-c_l^{\ ij}a_{ij}$$

ト一意的ニ解ケル。実際解ケルコトハ次ノヤウニシテ分ル。

$$[u_i u_j u_k]=[u_i\circ u_j]\circ u_k+[u_j\circ u_k]\circ u_i$$
$$+[u_k\circ u_j]\circ u_j=0$$

ノvノ係数 $c_{ij}^{\ \ l}a_{lk}+c_{jk}^{\ \ l}a_{li}+c_{ki}^{\ \ l}a_{lj}=0,$

即チ $(a_l^{\cdot k}=g^{km}a_{lm})$

$$c_{ij}^{\ \ l}a_l^{\cdot k}=a_i^{\cdot l}c_{lj}^{\ \ k}+a_j^{\cdot l}c_{il}^{\ \ k}.$$

之ハ $\bar{u}_l\to A\bar{u}_l=a_l^{\cdot k}\bar{u}_k$ ガ

$$A(\bar{u}_i\circ\bar{u}_j)=A\bar{u}_i\circ\bar{u}_j+\bar{u}_i\circ A\bar{u}_j$$

ヲ満足スルコト、即チ halbeinfach ナ Lie Algebra $\bar{\mathfrak{r}}$ ノ Ableitung ナルコトヲ示シテ居ル。Lemma 2ニヨリ

$$A\bar{u}_l=\bar{t}\circ\bar{u}_l \qquad \bar{t}=t^k\bar{u}_k\in\bar{\mathfrak{r}}$$

即チ $\quad a_l^{\cdot m}=t^k c_{kl}^{\ \ m}$ 或ハ $a_{lm}=c_{lm}^{\ \ k}t_k$

従ッテ(2)ハ解ケル。

(注意) 逆ニ$\mathfrak{R}$ノRadikal $\mathfrak{v}$ガ一次元ナラ、ϑハ

halbeinfach ナ Lie Algebra ノ一次ノ表現，従ッテ零表現デナケレバナラナイ。コノトキ上ノ証明ニヨリ $\mathfrak{f}$ ハ一意的ニ決リ，且ツ $\mathfrak{f}$ モ $\mathfrak{R}$ ノ Ideal デアル。即チ次ノ定理ヲ得ル。

「$\mathfrak{R}$ ノ Radikal $\mathfrak{r}$ ガ一次元ナラバ，$\mathfrak{R}$ ハ halbeinfach ナ Ideal $\mathfrak{f}$ ト $\mathfrak{r}$ トノ直和ニナル。分解ハ一意的デアル。」

(IV) ϑ ガ零表現デナイ場合ニ (1) ヲ解ク。

$$A_i = \begin{pmatrix} t_i^1 \\ \vdots \\ t_i^g \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{a}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}^1 \\ \vdots \\ a_{ij}^g \end{pmatrix} \qquad \bar{U}_i = \begin{pmatrix} h_{i1}^1 & \cdots & h_{ig}^1 \\ & h_{i\beta}^{\alpha} & \\ h_{i1}^g & \cdots & h_{ig}^g \end{pmatrix}$$

トカクト，

(1) ハ r^2 ケノ Vektor 方程式

$$(1') \quad \mathfrak{a}_{ij} + \bar{U}_i A_j - \bar{U}_j A_i - c_{ij}^k A_k = 0$$

ニナル。一方 $[u_i\, u_j\, u_k]$ ノ v_α ノ係数ヲ書キ上ゲルト

$$c_{ij}^l a_{lk}^\alpha + c_{jk}^l a_{li}^\alpha + c_{ki}^l a_{lj}^\alpha - a_{ij}^\beta h_{k\beta}^\alpha - a_{jk}^\beta h_{i\beta}^\alpha - a_{ki}^\beta h_{j\beta}^\alpha = 0$$

或ハ

$$(3) \quad \bar{U}_k \mathfrak{a}_{ij} + \left(\bar{U}_i \mathfrak{a}_{jk} + c_{ki}^l \mathfrak{a}_{jl}\right) - \left(\bar{U}_j \mathfrak{a}_{ik} + c_{kj}^l \mathfrak{a}_{il}\right) - c_{ij}^l \mathfrak{a}_{lk} = 0$$

左辺ニ $\bar{U}^k = g^{kl}\bar{U}_l$ ヲ乗ズル。

$\bar{U}^k\bar{U}_k = \mathfrak{J}$，Casimir 行列 $= cE$，　$c \neq 0$

$$\bar{U}^k(\bar{U}_i \alpha_{jk} + c_{ki}^{\ \ l}\alpha_{jl}) = \bar{U}^k\bar{U}_i\alpha_{jk} + \bar{U}_i \circ \bar{U}^l\alpha_{jl}$$

$$= (\bar{U}^k\bar{U}_i + \bar{U}_i \circ \bar{U}^k)\alpha_{jk} = \bar{U}_i\bar{U}^k\alpha_{jk}$$

同様ニ　$\bar{U}^k(\bar{U}_j\alpha_{ik} + c_{kj}^{\ \ l}\alpha_{il}) = \bar{U}_j\bar{U}^k\alpha_{ik}$

従ッテ (3) カラ

$$c\alpha_{ij} + \bar{U}_i(\bar{U}^k\alpha_{jk}) - \bar{U}_j(\bar{U}^k\alpha_{ik}) - c_{ij}^{\ \ l}(\bar{U}^k\alpha_{lk}) = 0$$

故ニ

(4)　$A_i = c^{-1}\bar{U}^k\alpha_{ik}$

ト置ケバ，(1′) ガ満足サレル。之レデスッカリ証明ハ済ンダ。

(終)

(注意) コノトキハ A_i ハ一意的ニハ決ラナイ。A_i ノ一般解ハ特別解

(4)　$\overset{(0)}{A_i} = c^{-1}\bar{U}^k\alpha_{ik}$

ニ (1′) ニ附随スル斉次方程式

(5)　$\bar{U}_i\check{u}_j - \bar{U}_j\check{u}_i - c_{ij}^{\ \ k}\check{u}_k = 0$

ノ一般解 $\check{u}_i$ ヲ加ヘタ。

$$A_i = \overset{(0)}{A_i} + \check{u}_i$$

デアル。(5) ノ解トシテハ，一見シテ直チニ分ルヤウニ，

$$\check{u}_i = \overline{U}_i\, w, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_g \end{bmatrix} \quad (w_1, \cdots\cdots, w_g \text{ ハ全ク任意})$$

ガアル。[14] ϑ ハ零表現デハナイカラ，$w \neq 0$ ナラ，$\check{u}_1, \cdots\cdots, \check{u}_r$ ハ悉ク０デハナイ．故ニ A_i ハ事實一意的デナイコトガ分ル。

---

14) 之以外ニ方程式 (5) ノ解ハナイノデハアルマイカ？