889. Linear, semi-ordered Space ニツイテ

深宮 政範 (阪大)

Eヲ linear, semi-ordered space トシ, semi-order ガ $X > \theta$ デ定義サレテヰルトスル。

1°. $x > \theta \longrightarrow x \neq \theta$

2°. $x > \theta,\ y > \theta \longrightarrow x+y > \theta$

3°. 凡テノ $x \in E$ ニ對シテ $x_+ > \theta$ ガ定義サレ

$x_+ \geqq x$, 且ツ $x' \geqq \theta$, $x' \geqq x$ ナラバ $x' \geqq x_+$

$(-x)_+ = x_-$ トスレバ $x = x_+ - x_-$ ト *unique* ニ分解サレル。且ツ 3° ハEガ *lattice* デアルコトヲ示ス。

$|x| = x_+ + x_-$ トスル。

4° $\lambda > 0$, $x > \theta$ ナラバ $\lambda x > \theta$

5° $u > \theta$ ガ存在シテ（*unit*！）凡テノ $x \neq \theta$ ニ對シテ $-tu < x < tu$ ナル様ナ $t > 0$ ガ存在スル。カヽル t ノ *g.l.b.* ハ > 0 $(x \neq \theta)$

5° ノ性質カラ空間ニ "*norm*" ヲ入レルコトガ出来ル、夫ニハ 5° ニ於ケル t ノ *g.l.b.* ヲ $\|x\|_u$ トスレバ良イ。從ッテEハ "*norm*" ノツイタ *semi-ordered space* トナル，之レヲ E_u デ表ハス。實ハ

Cor. $x \geqq \theta$, $y \geqq \theta$ ナラバ

$$\|x \cup y\|_u = \max(\|x\|_u, \|y\|_u)$$

ガ 5° カラ出テ來ル，從ッテ E_u ハ *abstract* (M) ト考ヘラレル。

Cor. ノ證明ハ殆ンド明ラカデアル。$\theta \leqq x < tu$, $\theta \leqq y < su$ ナラバ $\theta \leqq x \cup y < \max(t, s)\,u$, $\|x \cup\|_u \leqq \max(\|x\|_u, \|y\|_u)$, 一方 $\max(\|x\|_u, \|y\|_u) = \|x\|_u$ トシ; t_0 ヲ $x \cup y < t_0 u$, $t_0 < \|x \cup y\|_u + \varepsilon$ トスレバ $x \leqq x \cup y < t_0 u$ デアルカラ $\|x\|_u < \|x \cup y\|_u + \varepsilon$, 故

ニ ヨハ任意デアルカラ $\|x\|_u = \|x \cup y\|_u$.

斯ル abstract M-space ハ一ツノ bicompact ナ空間ノ上ノ凡ユル連続函数ノ空間ト isometric, lattice-isomorphic デアルコトガ前ニ角谷静夫氏ニ依ツテ示サレタ。[1] 夫ト独立ニ M.-S. Krein[2] ガ矢張リ同一ノ事実ヲ証明シテ居ル、論文ハ定理ト必要ナ lemmas 等ヲ述ベテ居ルダケデ全部ハ分ラナイガ，大体証明ヲ考ヘルコトガ出来タ様ニ思フノデ，要点ダケ述ベテ見タイ。

吾々ハ今一ツノ假定ヲ設ケル。（之ハ実際証明ガデキルノデアル）。

6°. E_u ハ $\|x\|_u$ ニツイテ complete デアル。

E_u ハ Banach space デアルカラ $\bar{E}_u$ ヲ考ヘル。$f \in \bar{E}_u$ ガ $x \geqq \theta$ ナラバ常ニ $f(x) \geqq 0$ デアレバ "non-negative" ト云ヒ，$f \geqq \theta$ ト記スト $\bar{E}_u$ ハ又 linear, semi-ordered space ニナル．$f > \theta$ ナラバ

$\|f\|_u = \sup\limits_{-u<x<u} |f(x)| = f(u)$ ナルコトハ明カデアル．

$f > 0$, $f(u) = 1$ ナル凡ユル $f \in \bar{E}_u$ ノ集合ヲ H_u デ表ハス。

証明ノ方針　角谷氏ノ方法モ，M.-S. Krein ノ方針モ共ニ E_u ヲ $\bar{E}_u$ ノ上ノ連続函数ニヨッテ表現シヨウトス

---

(1) 角谷静夫氏，学士院記事，XVI－NO.3. pp. 63-67.

(2) M.-S. Krein, C.R.U.R.S.S., XXVII, NO.5

ルノデアル、即チ $x \in E_u$ ニ對シテ $f(x) = \mathfrak{X}(f)$（又ハ $= g(f;x)$）ナル $\bar{E}_u$ ノ上ノ continuous function ヲ考ヘテ之ヲ x ニ對應サセルコトニ依ラウトスルノデアル。然シ $\bar{E}_u$ 全体デ考ヘテハ点ガ多スギルノデ —— 之ハ lattice-isomorphic ニナラナイ ——．ソノタメニ f ノ一部分 S ヲ考ヘ，又 $S \subset \bar{E}_u$ ニ functional トシテノ weak topology ヲツケル．Krein ノ場合最モ大事ナ部分ハ次ノ定理デアル。

定理(i) H_u ハ closed, bounded, regularly convex デアル。

(ii) H_u ノ extreme points ノ集合 S_u ハ leer デハ無イ。

(iii) $f \in S_u$ ナルタメノ必要十分ナ條件ハ $|f(x)| = f(|x|)$, $x \in E_u$ ナルコトデアル。

注意 Banach-space E ノ conjugate space $\bar{E}_u$ ノ部分集合 K ガ regularly convex デアルト云フノハ、任意ノ $g \bar{\in} K$ ニ対シテ $\sup_{f \in K} f(x_0) < g(x_0)$ ナル $x_0 \in E$ ガ存在スルコトヲ云フ。regularly convex ナ集合ハ又 convex デアル。

f ガ convex-set K ノ extreme point デアルト云フノハ K ニ屬スル segment ノ中点ニナラナイコトヲ云フ，即チドンナ $g, h \in K$ ニ對シテモ $f \neq \frac{1}{2}(g+h)$.

証明(i) H_u ハ $f(u) = \|f\|_u = 1$ ヲ滿足スル故有界デアル．又 H_u ハ closed デアルコトモ明カデアル．

モシ $f_0 \in \bar{E}_u$ ニ對シ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\|f_0 - f\|_u < \frac{\varepsilon}{2}$, $f \in H_u$ ナル f ガ常ニ存在スルトスレバ $\theta < x < u$ ナラバ

$$f_0(x) - f(x) > -\varepsilon, \quad 從ッテ \quad f_0(x) > f(x) - \varepsilon > -\varepsilon$$

ガ成立ツ、ヨッテ $f_0(x) \geqq \theta$, 且ツ $f_0(u) = 1$, 從ッテ $f_0 \in H_u$, H_u ハ closed.

H_u ガ regularly convex デアルコトモ直グ分ル. $g \bar{\in} H_u$ デアレバ $g \ngtr \theta$ 又ハ $g(u) \neq 1$ デアル. 例ヘバ $g(u) < 1$ デアレバ X_0 (定義ノ) トシテ $-u$ ヲトレバ良イ。

依ッテ (i) ハ証明サレタ。

(iii) a) $|f(x)| = f(|x|)$, $x \in E_u$ ガ成立スレバ $f = \frac{1}{2}(g + h)$, $g, h \in H_u$ ($g > \theta$, $h > \theta$, $g(u) = h(u) = 1$) ナルトキハ $f = g = h$.

証明 $f(x) = g(x)$, $x > \theta$ ダケヲ証明スレバ充分デアル。今 $f(x) = \alpha$, $x \geqq \theta$ トスル. $f(u) = 1$ デアルカラ

$$f(x - \alpha u) = 0, \quad 從ッテ \quad f(|x - \alpha u|) = 0.$$

從ッテ $g(|x - \alpha u|) = 0$.

$$(x - \alpha u)_+ = (x - \alpha u) \cup 0 = x \cup \alpha u - \alpha u,$$

$$(x - \alpha u)_- = (-(x - \alpha u)) \cup 0 = (\alpha u - x) \cup 0 = \alpha u \cup x - x$$

從ッテ $g(|(x - \alpha u)_+|) = g(|(x - \alpha u)_-|) = 0$ カラ

$$g(x \cup \alpha u) = g(\alpha u) = g(x), \quad g(x) = \alpha$$

ヲウル. 依ッテ $f(x) = g(x)$, $x > \theta$ 從ッテ凡テノ $x =$

對シテ $f(x)=g(x)$ が成立ツ。

注意 $|f(x)|=f(|x|)$, $x\in E$ ハ次ノ條件ト equivalent デアル。

$$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y),\quad f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$$

b) ドンナ $g, h\in H_u$ ニ対シテモ $f\neq\frac{1}{2}(g+h)$ デアレバ $f(|x|)=|f(x)|$, $x\in E_u$ が成立スル。

証明ハ簡単デアル. $|f(x)|=f(|x|)$, $x\in E_u$ が成立シナカッタトスレバ

$x, y>\theta$, $x\wedge y=\theta$, 且ツ $f(x)>0$, $f(y)>0$

ナル x, y が存在スル。今任意ノ z ニ對シテ

$z_1=z\cap y$, $z_2=z-z_1\ (=z-z\cap y)$

トオクト $z_1\geqq\theta$, $z_2\geqq\theta$, $z_1\wedge z_2=\theta$, $z_1+z_2=z$

次ニ $z\geqq\theta$ ニ對シテ

$$g'(z)=f(z_2),\qquad g(z)=\frac{g'(z)}{g'(u)}$$

$$h'(z)=f(z_1)\qquad h(z)=\frac{h'(z)}{h'(u)}$$

$$g(w)=g(w_+)-g(w_-),\quad h(w)=h(w_+)-h(w_-),$$
$$w\in E_u$$

ト定義スレバ $g, h\in H_u$ 且ツ $f=\rho g+(1-\rho)g$, $0<\rho<1$ ヲウル. 從ツテ $g_1=2\rho g+(1-2\rho)h$, $h_1=h$ トスレバ, $f=\frac{1}{2}(g_1+h_1)$, g_1, h_1 ヲ H_u トナッテ假定ニ矛盾スル。

以上ニ依ッテ (i), (iii) が証明セラレタ。

次ニ (ii) H_u ノ extreme points ノ集合 S_u ハ leer デハナイコトヲ証明シナケレバナラナイ。之レハーツノ定理ヲ用フレバ容易デアル。[3] Krein ハ之レヨリ一般ナ定理ヲ証明シテ，ソレカラ導イタ[4] 即チ

定理　Banach 空間 E ノ conjugate space $\bar{E}$ ノ regularly convex subset K ハ必ズ extreme points ヲモツ。

コノ定理モ前述ノヤウニ有界ナ場合ハ容易デアル。

（續ク）

---

3) $\hat{S}$mulian, Rec. math., 7-3 (1940).

4) Krein-Milman, Studia Math. 9 (1940)（未着）