

892. リーマン面ノ寫像函数ノ次數

評價=就イテ I

小林 善一 (東京高師)

リーマン面ノ寫像函数ノ逆函数ヲアル有理型函数 $w(z)$ ノ次數 (之ハ面ニ特有ナ數=ナリマスカラ、以下單=リーマン面ノ次數ト云フコト=致シマス) ヲ線狀複体ニヨツテ定メル問題ヲ考ヘテ見マシタ。Ulrich 氏一派ノ人々ノマツテ居ル問題ノ一ツデスカラ、アチラデハ相當進ンデ居ルコトト思ハレマス。茲ニハ上カラノ評價ヲ試ミテ見マス。方法等ニツキ皆様ノ御教示ヲイタシキタイト思ヒマス。

$|z| < \infty$ ニ於ケル有理型函数 $w(z)$ ノ次數トハ $T(r)$ ノ次數ノコトヲ $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r)}{\log r}$ ニ定義サレル。Picard-Borel ノ定理ニヨレバ此ノ ϵ ノハ高クニツ、 a 点ヲ除イテ $N(r, a)$ 、 $n(r, a)$ ノ次數ニ等シイ。従ツテ $n(r, a)$ ノ次數ヲ調べレバヨイ。Ahlfors ノ歪曲定理ニヨル等角幾何學的ノ方法ヲ用ヒル。單純ナ面ヲハ真ノ次數カ出ル。

簡單ノクメ=リーマン面 F ノ P 箇ノ底点 (Grundpunkte) ヲ持ツ ϵ ノトシ 而シテ之等ノ底点ハ w 平面ノ單位円ノ等分点

$$a_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{P}}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, P-1$$

トスル。 ν ノ ϵ lving ノ意味ノ複体ヲ T トシ、 $T^t(0$

次節点カラ t 以内ノ距離 = フル T / 点 / 全体) / 縁 / 長さ,
 但シ代数及ビ正則基本範圍 (Elemental domain) =
 ツイテハ其ノ T^t = 属スル同ノ部分ト T^t = 属シ + イ周ノ部
 分ノ長さノ短イ方ヲ取ルモノトシテ $\sigma(t)$ トスル。又 T^t
 = 属スル奇数次 (偶数次, 又ハソレヲ和ヲモヨイ) ノ節点
 ノ総数ヲ $\nu(t)$ トスル。然ルトキハ F / 次数ハ

$$(1) \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{\int_{t_1}^t \frac{dt}{\sigma(t)}}$$

ヲ越ヘ + イ。

先ヅ F カラ 角谷サンノ面 = 類似ノ ϵ / K ヲ作リマス。 F
 ニ半直線 $\arg w = \frac{2\nu\pi}{p}$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, p-1$ デ可附番
 無限ノ單葉角範圍ヲ分ケル。角範圍 $\frac{2\nu\pi}{p} < \arg w < \frac{2(\nu+1)\pi}{p}$
 ヲ函数

$$(2) f_\nu = \frac{1}{\pi} \log \frac{w^{\frac{p}{2}} - a_\nu^{\frac{p}{2}}}{w^{\frac{p}{2}} + a_{\nu+1}^{\frac{p}{2}}}$$

= ヨツテ 左平面ノ実軸 = 平行ナ中ノ帯 = 寫シマス。此ノト
 キ角範圍ノ二等分線 $\arg w = \frac{(2\nu+1)\pi}{p}$ / 像ハ虚軸上ニ
 極点 $a_\nu, a_{\nu+1}$ / 像ハ夫々 $+\infty, -\infty$ =, 單位内内ノ角
 範圍ノ辺ハ帯ノ下縁 =, 円外ノ辺ハ上縁 = 寫サレル。ソレカ
 ラ

1°. $w=0$ ガ ν 次, $w=\infty$ ガ $(\nu+1)$ 次節点デアル
 角範圍ノ像ハ虚軸ヲ折目トシテ左ノ部分ヲ右ヘ折リ返シテ重

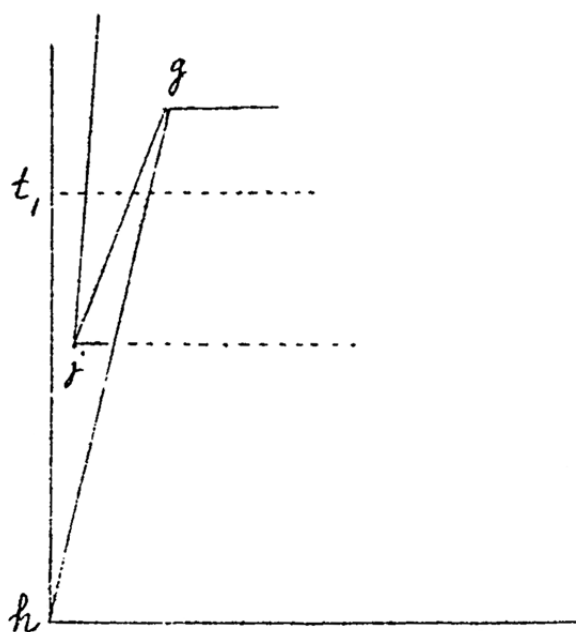
ネル。ソノ上ヲ $n < I(t) < n+1$ 迄平行移動スル。

2°. $w = \infty$ が n 次, $w = 0$ が $(n+1)$ 次節点デアル角範囲ノ像ハ一度実軸ニ戻シテ裏返シテカラ 1° ト同シ操作ヲスル。

Fノ全部ノ角範囲ヲカク寫像スレバ夫レ等ノ縁、原像通り一致シテ居リ、両側ノ寫像モ亦コノ上テ一致スル故、Fニ從ツテ貼布シテオケバ、連結的ナ面 Kヲ得ル。夫レ故 KトFノ点ハ一對一連続テ、角範囲ノ上テハ等角或ハソノ裏返シニナツテ居ル。Kハ虚軸上ニ *Elfring*ノ線体ト實現シテ居ル。

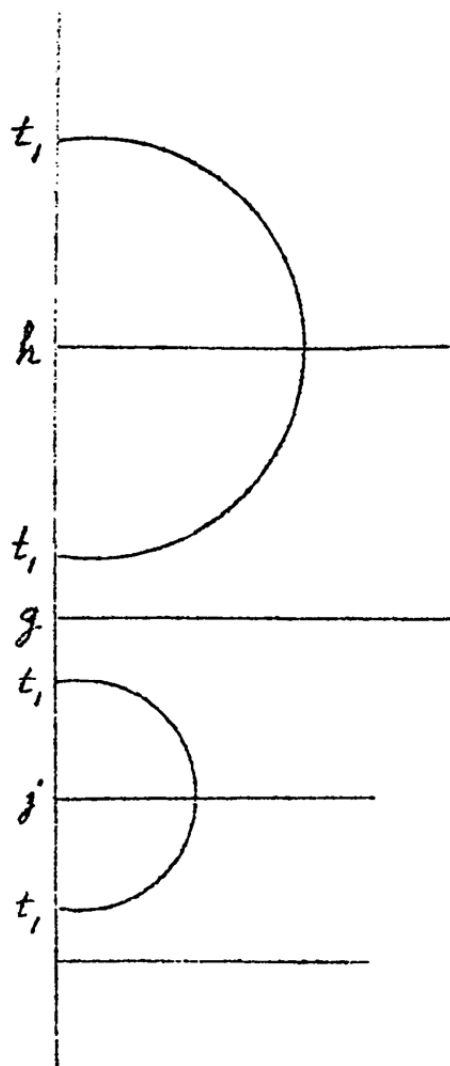
Fヲ $|z| < \infty$ ノ等角ニ寫像シテ $w = 0$ ノ 0 次節点ガ $z = 0$ ニ移ルトスル。 $\log z = u + i v$, $0 < v < 2\pi$ トスル。面 Kノ座標ヲ $t = s + i t$ トシテ、K上ノ單一閉曲線 $\sigma(t)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

1°. 對數分岐点 ζ ニ對應スル基本範圍 (ζ ノ近傍ニ對應スル Kノ部分)ガハ虚軸上 $t \leq t_1$ ナル点全体ハ若干ノ折レ



重ナツタ線分トナル故之レ等ヲ直径トスル。半円ヲ此ノ範圍ニ書イテ $\sigma(t_1)$ ノ部分トスル。(一度展開シテ内ヲ書イテ元通り折り重ねル意) 周ノ長サノ和ハ直径ノ和ノ $\frac{\pi}{2}$ 倍、即チ $\sigma(t_1)$ ノ此ノ範圍ノ分前ノ $\frac{\pi}{2}$ 倍デアル。

t_1 ガ増加スルニツレテ此ノ各



々ノ円ノ直径ハ大キクナリ左圖ノ
 g ノマウナ点ヲ切スルニ至ルトニ
 ツノ円ハ直径ノ和ヲ直径トスルー
 ツノ円ヲ置キ換ヘルコトニナル。

2°. 代数分岐点又ハ正則点 α
 ニ對應スル K ノ基本範曲ハ筒狀ニ
 ナル。 $m \leq I(\alpha) \leq h$ ニアルト
 スルト、 $m \leq I(\alpha) < t^*$ ニ於ケ
 ル虚軸上ノ境界線ノ長サノ和ハ全
 周ノ丁度 $\frac{1}{2}$ ニナル如キ t^* ガト
 レル。 $m \leq t_1 < t^*$ ニ對シテハ
 10ト同様ノ円同ヲ書イテ $\textcircled{H}(t_1)$ ノ
 部分ノ候補者トスル。 $t^* \leq t_1 < h$

ナル t_1 ニ對シテハ $t_1 \leq t_1$ ニアル範圍ノ周ヲ直径トスル半
 円周(展開シテ書イテ元ニ戻スコト 1° ノ通り)ヲ $\textcircled{H}(t_1)$
 ノ部分トスル。 t_1 ヲ増加スルトキ、半径ガ不連続ニ変ルノ
 ハ折レ目ニ當ル t_1 及ビ t^* ニアル。 $\textcircled{H}(t_1)$ ヲ右方連続ニス
 ルタメニ、一ツノ半円ガニツノ半円ニ分レル所デハ分レル方
 ヲ採用スル。

全部ノ K ノ基本範曲ニツイテ $1^\circ, 2^\circ$ ノ円周ヲ書イテ、
 併セタモノノ一添外方ノ單一閉曲線ヲ $\textcircled{H}(t_1)$ トスル。 T ガ
 云ハル等次曲線ノ一添外側ニ當ル。 T^\pm ハ丁度ツノ内部ニ包
 圍サレル。 t_1 ヲ増加スレバ $\textcircled{H}(t_1)$ ハ t_1 ノ孤立値ヲ除イ
 テ連続ニ後戻リスルコトナク変リ、 $t_1 \rightarrow \infty$ トスレバ有限

= 孤立セル穴ヲ残シテ面Kヲ盡ス。④(t)ノ長サハ定理ヲ述
 ベク $\sigma(t_1)$ ノ $\frac{\pi}{2}$ 倍デアアル。

$\log z = u + iv$ 端ニ於テ ④(t)ノ像ヲ L_t トシ

$$u_2(t) = \text{Max}_{k \in \textcircled{H}(t)} u(s, t), \quad u_1(t) = \text{Min}_{k \in \textcircled{H}(t)} u(s, t)$$

$$w(t) = u_2(t) - u_1(t)$$

トオケバ

$$\sqrt{4\pi^2 + w^2} \leq \int_{\textcircled{H}(t)} \left| \frac{d \log z}{dk} \right| |dk|$$

Schwarzノ補助定理ニヨツテ

$$4\pi^2 + w^2 \leq \int_{\textcircled{H}(t)} |dk| \int_{\textcircled{H}(t)} \left| \frac{d \log z}{dk} \right|^2 |dk|$$

$$8\pi \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sigma(t)} + \frac{2}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{w^2}{\sigma(t)} dt$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\textcircled{H}(t)} \left| \frac{d \log z}{dk} \right|^2 |dk| dt$$

右辺ハ區間 (t_1, t_2) ノ $t = \text{對スル}$ ④(t)ノ像 L_t ノ面ノ
 面分ノ面積デアヤテ

$$2\pi \{u_2(t_2) - u_1(t_1)\} = 2\pi \{u_1(t_2) - u_2(t_1) + w(t_1) + w(t_2)\}$$

ヨリ大デアイ。即チ

$$u_1(t_2) - u_1(t_1) \geq 4 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sigma(t)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{w^2}{\sigma(t)} dt - w(t_1) - w(t_2)$$

之カラ後ハ、A. Hilbert の方法ト全ク同シテ

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sigma(t)} > 2$$

ナル場合ニハ

$$(3) \quad u_1(t_2) - u_2(t_1) \geq 4 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sigma(t)} - 8\pi$$

ガ成立スル。

$u_1(t_2)$ ハ t_2 ノ孤立点ヲ除イテ連続、単調増加ナル。不連続点ニ於テハ右方ニ連続ナル。 $r = |z|$ トオキ $n(r, \infty)$ ヲ $w(z)$ ノ無限点ノ箇數、 $u_1(t) = \log r$ トオケバ

$$n(r, \infty) \leq \nu(t) \quad \nu(t) \text{ ハ複体部ハ } T^t \text{ 奇数次節点ノ總數}$$

依ツテ (3) ト結ンデ、十分大ナル $t = \bar{t}$ テ

$$(4) \quad \frac{\log n(r, \infty)}{u_1(t) - u_2(t_1)} \leq \frac{\log \nu(t)}{4 \int_{t_1}^t \frac{dt}{\sigma(t)} - 8\pi}$$

$t = \bar{t}$ テ $u_1(t)$ ガ不連続ナルトスルト u_1 ノ單調性カラ $\lim_{t \rightarrow \bar{t}-0} u_1(t) = u'$ ナル u' ガアル。 $u' \leq u < u_1(\bar{t})$ ナル $u = \bar{u}$ テハ $u' = \log r'$ 、 $u_1(\bar{t}) = \log \bar{r}$ トオイテ

$$\frac{\log n(r, \infty)}{u - u_2(t_1)} \leq \frac{\log n(\bar{r}, \infty)}{u_1(\bar{t} - \Delta t) - u_2(t_1)}$$

$\Delta t > 0$

$$\leq \frac{\log \nu(\bar{t})}{4 \int_{t_1}^{\bar{t}-\Delta t} \frac{dt}{\sigma(t)} - 8\pi}$$

$\Delta t > 0$ の如何ニ小サクトモヨイシ、右辺ノ積分ハ上限ニツ
イテハ連続ナルカラ $u' \leq u < u_1(\bar{t}) + \epsilon$ $u = \text{對シテ}$
 ϵ

$$(5) \frac{\log n(r, \infty)}{u - u_2(t_1)} \leq \frac{\log \nu(\bar{t})}{4 \int_{t_1}^{\bar{t}} \frac{dt}{\sigma(t)} - 8\pi}$$

ガ成立スル。(4), (5) カラ u_1, t_1 ヲ独立ニ無限大トスルトキ
不等式

$$(1) \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, \infty)}{\log r} \leq \frac{1}{4} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{\int_{t_1}^t \frac{dt}{\sigma(t)}}$$

之ヲ証明ガ終ル。

應用トシテニ、三ノ例ヲ計算スル。

(I) Ulrich, 所謂 g 本ノ週期端 (periodische
Euden) ヲ持ッリーまん面ノ次数

十分大ナル $t = \text{對シテ}$ 複体 T ノ部分 T^t ノ奇數次節点ノ
箇數 $\nu(t)$ 緣ノ長サ (代数基本範圍ニ修正ヲ加ヘタル) $\sigma(t)$
 $= \text{對シテ}$ 夫々

$$(6) \begin{cases} \nu(t) \leq C_1 t \\ \sigma(t) \leq 2g t + C_2 \end{cases}$$

ヲ満足スル常數 C_1, C_2 ガ存在スル (1) ハ

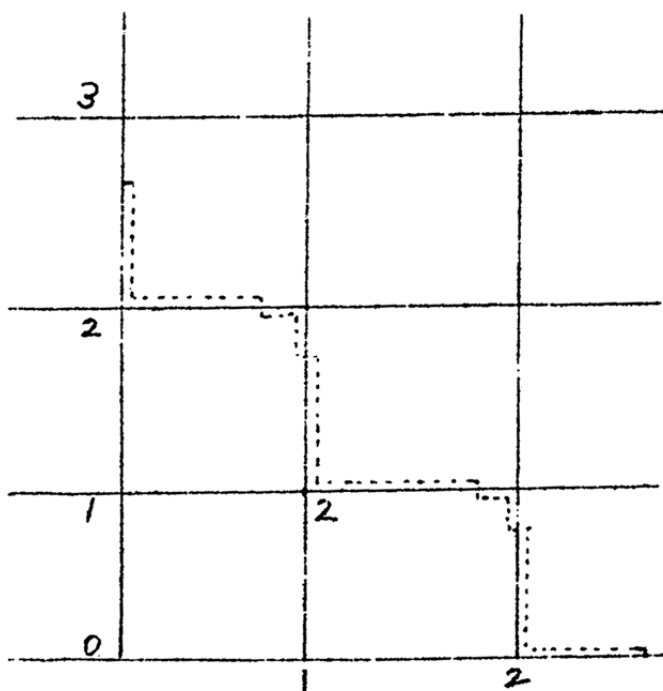
$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \overline{\lim} \frac{\log \nu(t)}{\int_{t_1}^t \frac{dt}{\sigma(t)}} \\ & \leq \frac{1}{4} \overline{\lim} \frac{\log t + \log c_1}{\frac{1}{2q} \left\{ \log \left(t + \frac{c_2}{2q} \right) - \log \left(t_1 + \frac{c_2}{2q} \right) \right\}} \\ & = \frac{q}{2} \end{aligned}$$

$q > 1$ のときハ Ahlfors の漸近値 = 対スル定理が逆 = 次数がオサヘラレル。丁度 $\frac{q}{2}$ がソノ次数 = ナル (Ulbrich の定理)

$q = 1$ が對数分岐点ヲ持タナイ一本ノ週期端カラナルリーマン面ノ次数ハ 0

之等ノ結果ハ端ガ週期的デナクトモ (6)ヲ満足スル常数 q, c_1, c_2 ガトレバヨイ。

(II) $p(z)$ 及ビ夫等 = 類似ノ面ノ次数



$p(z)$ がハ

$$\nu(t) \leq 4t^2$$

$$\sigma(t) = 8t \text{ (左図線)}$$

$$\frac{1}{4} \overline{\lim} \frac{\log \nu(t)}{\int_{t_1}^t \frac{dt}{\sigma(t)}} = 4$$

左圖ヲ第 II, III 象限ヲ消シテ複体ハ次数ノ上界 3ヲ得ル。

$\rho(2)$ の次数は 2 デアルカラ、上ノ結果ハ未ダ改良ノ餘
地ガアツテ夫ハ代数分岐点ノ近傍ニ対スル幾何学的技巧ノ問
題デアル。