894. Quasi-field ノ Normal basis ニツイテ, II

中山　正（阪大）

前号ノ談話デ次ノコトヲ証明シタ。P ヲ quasi-field. $\mathfrak{G}$ ヲ outer automorphism ノ有限群（ソノ order n）. Φ ヲ invariant elements ノナス sub-quasi-field トスル. シカラバ Jacobson ニヨツテ $(P : \Phi) = n$ デアルガ、ソレハミナラズ P ハ Φ ニ対シテ normal basis

$$b^E, b^S, \cdots\cdots, b^T \quad (\mathfrak{G}=\{E, S, \cdots\cdots, T\})$$

ヲモツ。

ソノ証明ニ於テ簡単ノタメ $\mathfrak{G}$ ノ order n ガ characteristic デワレナイ, 即チ group ring ガ semi-simple ノ場合ダケヤッテ、ソウデナイ場合ハ（Deuring ノ semi-simple ノ場合カラ modify シテ、ソウデナイ場合ニシタ On Frobeniusean algebras, II ノ中ノ論法デ）類似ニ簡単ニ出来ルトダケ述ベテオイタ。然シサウ簡単デモナク、事実小生自身後カラ色々補足シナケレバナラナイ点ニ気ヅイタリシタノデ、ソノ場合ノ証明ヲ以下ニ述ベル。

先ヅ、以前ノ如ク P ノ核心ヲ Z トシ, $k = \Phi \cap Z$ トスル。更ニ k ノ有限拡大 k^* ヲトリ

$$P^* = P_{k^*}, \quad \Phi^* = \Phi_{k^*}$$

ヲツクル。擴大ハ k ヲ基礎ニシテデアル。ソノトキ、例ノ speiser ノ定理ノ拡張ヲ更ニ extend シテ

<u>Lemma.</u> C_S $(S \in \mathfrak{G})$ ヲ P^* ニオケル regular ナ行列ノ system デ

$$(1) \qquad C_S C_T^S = C_{TS}$$

ヲ満ストスル。シカモ C_S ナル system ハ

$$(2) \qquad C_S = \begin{pmatrix} D_S & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ナル形ニ reduce サレテヰルトスル。シカラバ P^* ノ中ニ regular ナ行列 A デ $C_S = A^{-1} A^S$ ヲ満シ、シカモ

$$(3) \qquad A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad (\text{上ノ } C_S \text{ ト同ジ reduction})$$

トナツテヰルモノが存在スル。

<u>(証明)</u> 例ノ如ク

$$\gamma^* = u_E P^* + u_S P^* + \cdots\cdots + u_T P^*$$

ナル crossed product ヲ考ヘル．コレハ k^* ヲ核心ニモツ simple ring デアル。今 C_S ノ次數ヲ r, D_S ノソレヲ g トスル．シカルトキ

$$\mathfrak{W} = w_1 P^* + \cdots\cdots + w_g P^* + \cdots\cdots + w_r P^*$$

ナル r 次元ノ vector-space ヲ考ヘル．コンデ最初ノ g 個ノ $w_1, \cdots\cdots, w_g$ デ張ラレタ subspace ヲ $\mathfrak{V}$ トカリ．今 γ^* ノ元 u_S ニハ semi-linear transf. $\sigma = (C_S, S)$ ヲ，$\xi (\in P^*)$ ニハ $v \to v\xi$ ナル

transf. ヲ對應サセレバ $\mathfrak{W}$ ハ $\mathfrak{r}^*$ー右加群ニナル．ソレヲ $\mathfrak{W}_1$ ト書ク．然ルニ C_s ガ上ノ形ニ reduce サレテキルノデ、$\mathfrak{V}$ ナル部分ガ認容部分群ニナル．ソレヲ $\mathfrak{V}_1$ ト書ク．$\mathfrak{V}_1 \subseteq \mathfrak{W}_1$．

他方 $\{C_s\}$ ナル system ノ代リニ $\{E_s = E\}$ ナル system ヲ考ヘル．（r 次ノ単位行列）．ソウスレバ $U_s = (E, S)$ ヲ對應サセルコトニヨッテ $\mathfrak{W}$ ヲヤハリ $\mathfrak{r}^*$ー加群ト考ヘルコトガ出来、シカモ $\mathfrak{V}$ ハヤハリ認容デアル．コノ意味デノ $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{V}$ ヲソレゾレ $\mathfrak{W}_0$, $\mathfrak{V}_0$ ト書ク。

単純環 $\mathfrak{r}^*$ ノ右加群 $\mathfrak{W}_0$ ト $\mathfrak{W}_1$ ハ互ニ同型、同様ニ $\mathfrak{V}_0$ ト $\mathfrak{V}_1$ ガ互ニ同型デアルガ、コノ場合更ニ $\mathfrak{V}_0$ ト $\mathfrak{V}_1$ ノ間ノ同型対應ヲ<u>拡張シタ</u> $\mathfrak{W}_0$ ト $\mathfrak{W}_1$ ノ間ノ同型對應ヲ得ラレル、何故ナラ $\mathfrak{r}^*$ ノ加群トシテ完全可約ダカラデアル。コノ場合ノ対應ノ行列ヲ A トスレバ、ソレガ (3) ナル形ニナリ、我々ノ要求ヲ満ス。

上記ノ Speiser 定理ノ refinement ヲ使ッテ次ノ如クニ進ム $\mathfrak{r}^*$ トシテ $\mathfrak{g}$ ノ絶対既約ナ表現ガスベテ在ル様ナ体トスル。ソノ一ツヲ $S \to G_s$ トシ U_s ヲ Brauer-Nesbitt ノ意味デ G_s ニ對應スル正規表現ノ直既約成分トスル。

$$U_s = \begin{pmatrix} G_s & & O \\ & * & \\ & & * \\ * & & G_s \end{pmatrix}$$

$U_S U_T = U_{ST}$ ダカラ $U'_T U'_S = U'_{ST}$. 且ツ U'_S ハ

$$U'_S = \begin{pmatrix} G'_S & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ナル形デアル. ヨッテコレヲ $\{C_S\}$ トシテ Lemma ヲ使ヘバ (3) ノ形デ (B ノ大キサハ G'_S ノソレト同ジ) アッテ

(4) $U'_S = A^{-1} A^S$ 　即チ　$A^S = A U'_S$

ナル regular matrix A in $\mathfrak{P}^*$ カ存在スル。勿論 B ノ部分 ((3) ヲ見ヨ) モ regular デアル。

ソシテ

(5) $B^S = B G'_S$

デアル. $A = (a_{ij})$ トスレバ (4) 及ビ (5) ハ

(6) $(a_{i1}, \cdots\cdots, a_{ir})^S = (a_{i1}, \cdots\cdots, a_{ir}) U'_S$

(7) $(a_{i1}, \cdots\cdots, a_{ig})^S = (a_{i1}, \cdots\cdots, a_{ig}) G'_S$

$(i = 1, 2, \cdots\cdots, g)$

トナル. 今 B ノ中ノ g^2 個ノ元 a_{ij} ($i, j \leqq g$) ガ左側デ $\mathfrak{P}^*$ ニ對シテ一次独立ノコトヲイフ. ソレハ前号デ述ベタノト全ク同様デ (7) ト B ガ regular ナコトカラ出ル。

次ニ (6) ヲ見ルニ, ソレヲ

(8) $$\begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix}^S = U_S \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix}$$

トシテオケバ, $a_{i1}, \cdots\cdots, a_{ir}$ デツクラレタ $\mathfrak{P}^*$ ノ左加群

ガ同時ニ$\mathfrak{g}$ー点加群デアリ，ソレヲ$\mathfrak{M}_i$トスレバ$\mathfrak{M}_i$ガU_sニ属スル表現亜*－$\mathfrak{g}$－加群$\mathfrak{U}$ニhomomorphicナ事ヲ知ル。（シカモ$\mathfrak{U}$ニオイテG_sニ對應スルsubmoduleノimageガ丁度$a_{i1},\cdots\cdots,a_{ig}$デツクラレタ部分デアル）。今$i=1,2,\cdots\cdots,g$トシテ$g$個ノ$\mathfrak{M}_i$ヲツクル。ソノ和（$P^*$ノ中デツクラレタ）ヲ

$$\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\cdots\cdots,\mathfrak{M}_g)$$

トスレバ$\mathfrak{M}$ハ

$$\mathfrak{V}=\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\cdots\cdots+\mathfrak{U}_g$$

ナル直和ニhomomorphicデアル。但シ$\mathfrak{U}_i$ハスベテ$\mathfrak{U}$ニ同型ナル表現加群トスル。今$\mathfrak{U}$デ表現U_sノ最初ノ成分G_sニ對應スル部分群ヲ$\mathfrak{W}$トスル。ソシテ$\mathfrak{U}_i$デソレニ相當スル部分加群ヲ$\mathfrak{W}_i$トスル。シカラバ

$$\mathfrak{Y}=\mathfrak{W}_1+\mathfrak{W}_2+\cdots\cdots+\mathfrak{W}_g$$

ナル$\mathfrak{V}$ノ部分加群ガ丁度上ノhomomorphismデBノg^2個ノ元デ張ラレタ部分群（$\mathfrak{M}$ノ）ニmapサレル。シカルニBノg^2個ノ元ハ亜*ニ對シテ左一次独立デアルカラ、homomorphismハ$\mathfrak{Y}$カラソコヘノ所デハ少クモ1－1ノ同型對應デアル。シカルニ$\mathfrak{Y}$ハ$\mathfrak{V}$ノ最大完全可約部分群ヲ含ム（モシ亜*ガsemi-simpleナラ丁度一致スル）。故ニ$\mathfrak{V}$カラ$\mathfrak{M}$ヘノ全体ノhomomorphismモ1－1デ同型デナケレバナラナイ。

以下G_sトシテ$\mathfrak{g}$ノコトナル既約表現全部ヲウゴカシテ以前ノ如ク論ズレバヨイ。要点ハ正規表現ノ直既約成分ノ

構造論トソレカラ Speiser ノ定理ノ refinement デアル．実ハコノ refinement ガハジメ銀ガツカナカッタ（汗顔ノ至リデス）．コレヲ使ハナイデモ $P^* = P_{k^*}$ ガ quasi-field デアル場合（タトヘバ $k^* = k$ デヨイトキ）ハ困難ナイ．即チ A トシテ任意ノ形，必ズシモ (3) ニナッテヰナイモノヲトリ，ソノ始メノ g 縦列ノ中ニ適當ナ regular ナ g 次ノ小行列ガアルカラ，ソレヲ B ノ代リニツカヘバヨイ。

或ヒハモ少シ一般ニシテ，$Z^* = Z_1^* + Z_2^* + \cdots + Z_m^*$ ヲ Z^* ノ互ニ conjugate ナ体 Z_ν^* ヘノ分解シタトキ（Z/k ハ normal デ separable ノコトニ注意）$PZ_\nu^* = P^* Z_\nu^*$ ガミナ quasi-field ナラ同様ニ議論出来ル．スナハチ $Z_\nu^* = Z^* e_\nu$ トスル．タダシ e_ν ハ idempotent element トスル．先ヅ任意ノ形ノ A ヲトリ，ソノ PZ_1^* ニ関スル component $e_1 A$ ヲ考ヘル．コレハ quasi-field PZ_1^* ノ中ノ regular ナ行列デアル．故ニ始メノ g 縦列ノ中ニ g 次ノ regular ナ小行列ガアル（regular トハ PZ_1^* ノ中デノ意）．今ソレニ對應スル所ノ A ノ小行列ヲ B_1 トスル．シカラバ $e_1 B_1$ ガ PZ_1^* デ regular デアル．ヨッテ $(e_1 B_1)^S$ ハ $(PZ_1^*)^S = e_1^S P^*$ ノ中デ regular．他方

$$(e_1 B_1)^S = e_1^S B_1^S = e_1^S B_1 G_S'$$

ヨッテ $e_1^S B_1 G_S'$ ハ $e_1^S P^*$ デ regular．所ガ G_S' ハ regular ダカラ $e_1^S B_1$ ガ $e_1^S P^*$ デ regular デアル．然ルニ S ガ

O_f ヲウゴケバ e_i^σ ハ $e_1, \cdots\cdots, e_m$ ノ上ヲ（一般ニハ重複シテ）ウゴク．即チ B_1 ハ $PZ_1^*, \cdots\cdots, PZ_m^*$ ナルスベテノ成分ニ對シテ regular．故ニ P^* ノ行列トシテ regular デアル．故ニ再ビ B_1 ヲ B ノ代リニ使ヘバヨイ．（On Frobeniusean algebras. II．デ扱ッタ可換体ノ場合ハコノ場合ノ中ニ入ル）

シカシ一般ノ場合ニハヤハリ A ヲ (3) ノ形ニハジメカラトッテオカナイト旨ク行カヌ様ニ思フ。マタソノ方ガ自然デアリ、ヨイヤリ方ダト思フ。