895. Kollektiv ノ Regellosigkeit ニ就テ

伊藤　清
河田　敬義

R. v. Mises ノ Kollektiv ニヨル確率論ヲ巡ッテ幾ツカノ問題ガ引キオコサレテキルガ、其ノ一ツトシテ、確率ノ存在、其ノ加法性等ヲ公理ニオイテ出発スル確率論ノ立場カラ，Kollektiv ノ存在，意味等ヲ明カニシヨウトイフ問題モアル。

Kollektiv ノ定義カラ始メルト（問題ヲ簡単ニスルタメニ所謂 Alternativ 丈ヲ取扱フ。之レカラ一般ノ

Kollektiv ノ議論ヲ導クコトハ，例ヘバ P. Halmos, Invariants of certain stochastic transformations, Duke Math. J. 5 (1939), p. 465 ヲ参照），アルニツノ Merkmal A, B ヲモツ偶然事象ガアルトキ，コノ偶然事象ニ屬スル（独立）ノ試ミノ系列 $\{x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots\cdots\}$ ヲ考ヘル．（x_n° ハ A 又ハ B），コレヲ Alternativ トハ次ノ二條件ヲ滿足スル時ニ云フ。

(1) $x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots\cdots, x_n^\circ$ 中 A ノ數ヲ $\gamma_n(A)$，B ノ數ヲ $\gamma_n(B)$ トスル（$\gamma_n(A)+\gamma_n(B)=n$）。其ノ時

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n(A)}{n}=p_A,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n(B)}{n}=p_B$$

ガ存在スル。

(2) 次ニ任意ノ Stellenauswahl ニヨリ $\{x_n^\circ\}$ ノ部分列 $\{x_{n_\nu}^\circ\}$ ヲ選ンダトキ，$x_{n_1}^\circ, \cdots\cdots, x_{n_\nu}^\circ$ 中ノ A, B ノ數ヲ夫々 $\gamma'_\nu(A)$, $\gamma'_\nu(B)$ トスル。其ノ時 (1) ニ得ラレタ p_A, p_B デ矢張リ

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\gamma'_\nu(A)}{\nu}=p_A,\quad \lim_{\nu\to\infty}\frac{\gamma'_\nu(B)}{\nu}=p_B$$

ガ成立スル。

コノ場合 p_A, p_B ヲ夫々コノ Alternativ ニ於ケル A, B ノ確率ト呼ブ。

又 (2) ニ云フ Stellenauswahl トハ，x_n° ヲ部分列中ニ採用スルカシナイカハ $x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{n-1}^\circ$ マデノ結果ヲ参照シテモヨイガ，$x_n^\circ, \cdots\cdots$ 以下ノ Merkmal トハ無関

係ニ定メル様ナ任意ノ選ビ方ヲ云フ。例ヘバ

(i) 豫メ $x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots\cdots$ 以下ノ Merkmal トハ全ク無関係ニ，0 ト 1 トヲ勝手ニ並ベタ系列（例ヘバ（0, 1, 1, 0, 1, 0, ……）ノ如キモノ）ヲ作ッテオイテ，1 ニアタル番号丈ヲ選ブトイフコトニシテモヨイシ，又

(ii) 規則的ニ $f_n=1$ 又ハ 0 ヲ，$x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{n-1}^\circ$ ノ函數 $f_n=f_n(x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{n-1}^\circ)$ トシテ定メテオイテ，其レニ從ッテ選ンデモヨイ。(i) ハコノ特別ノ場合デアル，

(iii) 然シ又 $x_1^\circ, \cdots\cdots, x_{n-1}^\circ$ ノ結果ヲ參照シツヽ然モ氣マグレニ x_n° ヲ採用シタリ，シナカッタリシテモヨイ。

此ノ Kollektiv ノ定義ニ対スル反対ノ一ツハ，スベテノ Stellenauswahl ニ対シテ (2) ノ成立スルトイフコトハ論理上不可能デアルトイフコトデアル。即チ (i) ノ形ノスベテノ Stellenauswahl 中ニハ，丁度 $x_n=A$ トナル n 丈ヲ選ブ結果ニナルモノモ含マレルコトニナル筈デアルカラ。其レ故ニコノ矛盾ヲ避ケルタメニ，Regellosigkeit ニ制限ヲ附ケルコトガ試ミラレタ。其レハ Stellenauswahl ヲ (ii) ノ形ノモノニ限リ，而モ豫メ或ル可算箇ノ Stellenauswahl ヲ指定シテオイテ，ソレニ對シテ (2) ガ成立スルトイフコトニスルノデアル。ソウスレバ Kollektiv ノ存在ガ証明サレ（Doob, Wald 等），且ツ其レニヨリ確率論モ展開サレル（Dorge 等）。

以上ノ制限ハ Kollektiv ニ基イテ確率論ヲ組立テルタメニハ止ムヲ得ナイコトデハアルガ，Mises ノ初メニ考

ヘタ *Regellosigkeit* トハ多少ハナレタモノニナッテヰル様デアル。即チ"*I say that the assumption that every kind of place selection (Stellenauswahl) must leave the limiting values of relative frequencies in a collective unchanged, is nothing more than the following convention: we agree that, in a concrete case, when a collective is subjected to a certain place selection, the limiting values of the relative frequencies remain unaffected by this selection. The randomness axiom does not require more than that.*" (*Probability, Statistics and Truth*, (1939), p. 139)

コヽデ最初ノ問題ニ帰ルコトニスル。即チ Kollektiv ニヨリ確率ヲ定義スルトイフノデハナク、公理トシテ偶然事象ニ対シテ確率ガキマリ，且ツ加法性等ガ満足サレテヰルトシテ，ソコカラ確率論ヲ作ルトイフ立場カラ，Kollektiv ヲ眺メルコトニスル。便宜上A,Bナル Merkmal ヲ持ツ偶然事象ノ代リニ，$\alpha = p_B$, $\beta = -p_A$ ナル値ヲトル確率ガ夫々 p_A, p_B ナル如キ確率変数 x ヲ考ヘルト，x ノ平均値ハ0。此ノ偶然事象ニ属スル独立ナ試ミノ列ハ，互ニ独立ナ x ト同一法則ヲ持ツ確率変数 x_n ノ系列 $\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ デアラハサレル。一般ニ行ハレルヤウニ，カヽル無限列全体 Ω

ニ（無限次空間ノ直積ノ測度ヲ導入スル方法ニヨリ）確率ノ場ヲ拡大スル。

然ルトキハ大數ノ強法則ニヨッテ，Ω ノ確率 0 ノ場合ヲ除イテ，スベテノ Ω ノ元 $(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots)$ (x_n^0 ハ α 又ハ β) ニ対シテ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^0}{n} = 0$$

$x_1^0, \cdots\cdots, x_n^0$ 中 α, β ノ個數ヲ夫々 $\nu_n(\alpha)$, $\nu_n(\beta)$ トスレバ $(\nu_n(\alpha)+\nu_n(\beta)=n)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^0 &= \frac{1}{n}(\alpha\,\nu_n(\alpha)+\beta\,\nu_n(\beta)) \\ &= \frac{1}{n}(p_B\,\nu_n(\alpha)-p_A(n-\nu_n(\alpha))) \\ &= \frac{\nu_n(\alpha)}{n}-p_A \to 0,\end{aligned}$$

即チ

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(\alpha)}{n}=p_A, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(\beta)}{n}=p_B$$

トナル。

サテ (2) ノ「任意ノ Stellenauswahl ニ対シテ」トイフコトノ解釈デアルが，上ノ "in a concrete case" トイフ語ト考ヘ合セテ，Stellenauswahl 全体ヲ単ニ論理的ニバラバラナ全体ト考ヘナイデ，アル人が実際ニ Stellenauswahl ヲ実行スルトイフコトヲ確率事象ト考ヘルコトニスル。即チ Auswahlfunktion y_n

(x^0_n ヲ部分列中ニ取リ入レヽバ $y_n=1$，然ラザレバ $y_n=0$）ヲ 0, 1 ナル値ヲトル『確率変数』トスル。且ツ Stellenauswahl ノ定義ニ從ッテ，y_n ハ $x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, y_1, \cdots, y_{n-1}$ トハ関係ガアッテモヨイガ，$x_n, x_{n+1}, \cdots\cdots$ トハ独立デアルトスル。

カヽル x_n ト y_m トノ関係ガ確率論的ニ意味ヲモツタメニハ，同時ニ $x_1, x_2, \cdots\cdots, y_1, y_2, \cdots\cdots$ ノスベテヲ入レル確率ノ場 Ω_0 ガ予メ定義サレテヰテ，且ツ任意ノ $x_1=x^0_1, \cdots\cdots, x_{n-1}=x^0_{n-1}, y_1=y^0_1, \cdots\cdots y_{n-1}=y^0_{n-1}$ ナル條件附ノ確率変数 y_n モヨノ場 Ω_0 デ定義サレテヰナクテハナラナイ。[1] Ω_0 ノ中ニハ前ニ考ヘタ確率ノ場 Ω：$\{(x_1, x_2, \cdots\cdots)=\mathfrak{X}\}$ モ含マレテ居リ，又 x_n, y_n ヲ同時ニ考ヘタ $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})=\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots\cdots \\ y_1, y_2, \cdots\cdots \end{pmatrix}$ ナル並無限列ノ全体ノ作ル確率ノ場 Ω_1 モ入ッテヰルコトニナル。特ニ $\mathfrak{X}_0=(x^0_1, x^0_2, \cdots\cdots)$ ナル任意ノ Ω ノ点ニ対スル Ω_1 ノ部分空間 $\Omega_1(\mathfrak{X}_0)$：$\left\{\begin{pmatrix} x^0_1, x^0_2, \cdots\cdots \\ y_1, y_2, \cdots\cdots \end{pmatrix}\right\}$ ノ全体モ確率ノ場ヲ作リ，ソレガ丁度

---

(1) 勿論カヽル Ω_0 ヲ「von oben her」ニ前提シナクトモヨイ。$x_1, x_2, \cdots\cdots$ ノ各ノ分布（ソレハコノ場合皆同一）及ビ $x_1 x_2 \cdots x_n$ ガ與ヘラレタトキ y_n ノ條件附分布ヲ與ヘレバ「von unten her」ニ Ω_0 ヲ構成スルコトガ出来ル。論理的ニハ、何レニヨルモ同一デアルガ、認識過程カラ見レバ後者ノ方ガ適當デアル。

$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$ ナル條件時ノ Ω_1 ノ確率ノ場トシテ與ヘラレルコトニナル。

此ノ時(2)ノ任意ノ Stellenauswahl ニ対シテ極限値ガ変ラナイトイフコトノ確率論的表現トシテ『確率ノ場 $\Omega : \{(x_1, x_2, \cdots\cdots)\}$ ノ確率0ノ場合ヲ除イタスベテノ点 $\mathfrak{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots)$ ニ対シテ次ノ性質ガ成立スル。

$\Omega_1(\mathfrak{x}_0) : \left\{ \begin{pmatrix} x_1^0, & x_2^0, & \cdots\cdots \\ y_1, & y_2, & \cdots\cdots \end{pmatrix} \right\}$ ノ任意ノ点

$$(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0) = \begin{pmatrix} x_1^0, & x_2^0, & \cdots\cdots \\ y_1^0, & y_2^0, & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$ ニ對シテ

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} y_r^0 < \infty$$

デアルカ、

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} y_r^0 = \infty \text{ デ且ツ } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} x_r^0 y_r^0}{\sum_{r=1}^{n} y_r^0} = 0$$

ガ $\Omega_1(\mathfrak{x}_0)$ ノ確率0ノ場合ヲ除イテ成立スル。』

(5)ノ表現ハ $(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots)$ ニ対シテ、$y_{n_\nu}^0 = 1$ ニアタル n_ν 丈ヲ選ンデ部分列 $(x_{n_1}^0, \cdots\cdots, x_{n_\nu}^0, \cdots\cdots)$ ヲ作ルトキ、$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} x_{n_\nu}^0 = 0$ トイフコト、即チ(3)カラ $\mathfrak{y}_0$ ナル Stellenauswahl デ極限値 $p_A ; p_B$ ガ変ラナイコトニ當ル。

特ニ若シモ此ノ人ガ豫メ與ヘタ可算箇ノ(ii)ノ形ノ Stellenauswahl 丈ヲ施シテ見ヤウトイフ目論見ガアルナラバ、

カヽル Stellenauswahl ニ例ヘバ夫々 2^{-n} ($n=1,2,\cdots\cdots$) ナル確率ヲ予メ與ヘテオケバ, 確率0ノ除外ハコノ場合全然除外ノナイコトニナリ, コノ Stellenauswahl 全体デ極限値ガカハラナイコトヲ意味スル。

此ノヤウニ Stellenauswahl ヲ確率事象ト考ヘルコトハ, 特ニ近著ノ Amer. J. of Math. 62 (1940), 788–791. Z. W. Birnbaum, H. S. Zuckermann, On the properties of a collective デ殆ンド同ジ形デ述ベラレテオルガ, ソコデハ (ハッキリ断ッテナイ言葉ヲ使ッテアッタリシテ) 特別ノ場合ニモット強イ結果ヲ証明シテオル様ニ思ハレルノデ, コノ証明モ Doob, Note on probability, Annals of Math. 37 (1936), Halmos (前ニ挙ゲテアル) 殆ンド其ノマヽ適用スルガ, 念ノタメハッキリト上ノ命題ヲ証明スルコトヽスル。

今 $\Omega_1 : \left\{ (x, y) = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots\cdots \\ y_1, y_2, \cdots\cdots \end{pmatrix} \right\}$ 中 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty$ トナル部分空間ヲ E トスル。E ハコノ確率ノ場 Ω_1 デ probabisable デアル。次ニ

$$(6) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} x_r y_r}{\sum_{r=1}^{n} y_r} = 0$$

ノ成立スル Ω_1 ノ部分空間 F モ亦 probabisable デアル。其ノ時

(7) $P_r\left(\left(\Omega_1 - E\right) + E\cdot F\right) = 1$

ガ証明サレヽバ，Kolmogoroff 流ニ（Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung 参照）Nikodym ノ定理ヲ用ヒテ條件附確率 P_{r_u} ヲ定義スレバ，

$$P_r(A) = \mathfrak{M}_u\left(P_{r_u}(A)\right)$$

ガ成立スルカラ

$$P_{r_{y=y_0}}\left(\left(\Omega_1 - E\right) + E\cdot F\right) = 1$$

ガ Ω 空間ノ確率 0 ノ y_0 ヲ除キ成立スル。即チコレガ証明スベキ式デアッタ。故ニ (7) ヲ証明スレバヨイ。

先ヅ $p(E) = 0$ ナラ (7) ハ明カデアルカラ，$p(E) \neq 0$ トスル。$\int_E f\,dp$ ヲ以後 $\mathfrak{M}_E$ デアラハスコトヽスル。$m_n = \mathfrak{M}_E(x_n)$ トオクト

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = 0$

ガ成立スル。ソレニハ任意ニ正數 ε ヲ與ヘタトキニ，Ω_1 ノ確率ノ入レ方カラ，Ω_1 ニ於ケル finite cylinder set E_0（即チ E_0 ハ $x_{\lambda_1}, \cdots\cdots, x_{\lambda_s}, y_{\mu_1}, \cdots\cdots, y_{\mu_t}$ 丈ニ関シテ定メラレル Ω_1 ノ部分集合）ヲ選ンデ

$p(E + E_0 - EE_0) < \varepsilon$ ニスルコトガ出来ル。$n_0 = \underset{i,j}{Max}(\lambda_i, \mu_j)$ トオケバ，$n > n_0$ ナル x_n ハ $x_{\lambda_1}, \cdots\cdots, x_{\lambda_s}$, $y_{\mu_1}, \cdots\cdots, y_{\mu_t}$ トハ独立デアルコトヽ，$\mathfrak{M}(x_n) = 0$ 及ビ $|x_n| \leqq 1$ ナル性質カラ

$$|m_n| = |\mathfrak{M}_E(x_n)| = |\mathfrak{M}_{E_0}(x_n) + \mathfrak{M}_{E-EE_0}(x_n) - \mathfrak{M}_{E_0-EE_0}(x_n)|$$

$$\leqq |\mathfrak{M}(x_n)P_r(E_0)| + P_r(E - EE_0) + P_r(E_0 - EE_0) < \varepsilon,$$

$$n > n_0$$

トナルカラ，(8) ノ成立スルコトガワカル。

故ニコレカラ $\bar{x}_n = x_n - m_n$ ト置ケバ

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m} m_{m_r} = 0$$ ナル故

$$(6') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} \bar{x}_r y_r}{\sum_{r=1}^{n} y_r} = 0$$

ト(6)トハ同値デアルカラ，Fヲ(6')ノナリタツ Ω_1 ノ部分集合ト定義シテモヨイ。

サテ $\bar{x}_n$ ニツイテハ，$\mathfrak{M}_E(\bar{x}_n) = 0$ ト，

$\mathfrak{M}_E(\bar{x}_n^2) \leqq \mathfrak{M}_E(x_n^2) \leqq \mathfrak{M}(x_n^2) = \sigma^2$ ガ成リ立ツ。

次ニ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty$ ナル y ニ対シテ $\theta_n(y)$ ヲ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$

$\sum_{r=1}^{\theta_n} y_r = n,\ \sum_{r=1}^{\theta_{n-1}} y_r = n-1$ ニヨツテ定義スル。其ノ時任意ノ自然数ノ組 $a_1, \cdots\cdots, a_n$ ニ対シテ $E_{a_1\cdots\cdots a_n}$ ヲ $\theta_1 = a_1, \cdots\cdots, \theta_n = a_n$ トナルEノ部分集合トスル。ソノ特性函数ヲ $C_{a_1\cdots\cdots a_n}$ トスル。明カニ

$$(9)\begin{cases} a_i \geqq a_{i+k}\ (k>0) \text{ ナラバ } E_{a_1\cdots\cdots a_n} = 0, \\ \qquad E_{a_1\cdots\cdots a_{n-1}a_n} \cap E_{a_1\cdots a_{n-1}a'_n} = 0 \quad (a_n \neq a'_n) \\ E = \sum_{a_1=1}^{\infty}\cdots\cdots\sum_{a_n=1}^{\infty} E_{a_1\cdots\cdots a_n}, \end{cases}$$

ヲ満足スル。今

$$(10)\quad \mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_n}\bar{x}_r y_r\right)^2\right) \leqq n\sigma^2 P_r(E)$$

ヲ証明スル。先ヅ $n=1$ ノ場合ニハ，

$$\mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_1}\bar{x}_r y_r\right)^2\right)=\sum_{a_1=1}^{\infty}\mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_1}\bar{x}_r y_r\right)^2 C_{a_1}\right)^{*},$$

然ルニ $C_{a_1}=1$ ナル点デハ $\sum_{r=1}^{\theta_1}\bar{x}_r y_r=\bar{x}_{a_1}$，且ツ C_{a_1} ハ $x_1, \cdots\cdots, x_{a_1-1}, y_1, \cdots\cdots, y_{a_1-1}$ ノ函数ナル故 $\bar{x}_{a_1}$ ト独立ナル故，

$$* = \sum_{a_1=1}^{\infty}\mathfrak{M}_E\left(\bar{x}_{a_1}^2 C_{a_1}\right)=\sum_{a_1=1}^{\infty}\mathfrak{M}_E\left(\bar{x}_{a_1}^2\right)\mathfrak{M}_E\left(C_{a_1}\right)$$

$$\leqq \sigma^2\sum_{a_1=1}^{\infty}P_r(E_{a_1})=\sigma^2 P_r(E).$$

即チ(10)ガ成立スル。数学的帰納法ニヨリ $n-1$ ノ時マデ(10)ガ成立シタトスレバ，

$$\mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_n}\bar{x}_r y_r\right)\right)^2=\mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{r=1}^{\theta_n-1}\bar{x}_r y_r\right)^2\right)$$

$$+\mathfrak{M}_E\left(\bar{x}_{\theta_n}^2 y_{\theta_n}^2\right)+2\mathfrak{M}_E\left(\bar{x}_{\theta_n}\left(\sum_{r=1}^{\theta_n-1}\bar{x}_r y_r\right)\right)^{\triangle}$$

ニテ先ヅ $\sum_{r=1}^{\theta_n-1}\bar{x}_r y_r=\sum_{r=1}^{\theta_{n-1}}\bar{x}_r y_r$ ナルコトヽ。帰納法ノ假定カラ，右辺第一項 $\leqq (n-1)\sigma^2 P_r\{E\}$.

又 $n=1$ ノ場合同様 $C_{a_1\cdots\cdots a_n}$ ト $\bar{x}_{a_n}$ トハ独立ナル故

$$\sum_{a_1\cdots a_n} \mathfrak{M}_E(C_{a_1\cdots a_n}\bar{x}^2_{\theta_n} y^2_{\theta_n}) = \sum \mathfrak{M}_E(C_{a_1\cdots a_n}\bar{x}^2_{a_n})$$

$$= \sum \mathfrak{M}_E(\bar{x}^2_{a_n})\mathfrak{M}_E(C_{a_1\cdots\cdots a_n})$$

$$\leqq \sigma^2 \sum_{a_1\cdots a_n} P_r(E_{a_1\cdots\cdots a_n}) = \sigma^2 P_r(E)$$

$$\text{第三項} = 2\sum_{a_1\cdots a_n} \mathfrak{M}_E\left(C_{a_1\cdots a_n}\left(\sum_{\gamma=1}^{\theta_{n-1}} \bar{x}_\gamma y_\gamma\right)\bar{x}_{\theta_n}\right)$$

$$= 2\sum \mathfrak{M}_E\left(C_{a_1\cdots\cdots a_n}\left(\sum_{\gamma=1}^{n-1} \bar{x}_{a_\gamma}\right)\cdot \bar{x}_{a_n}\right)$$

$$= 2\sum \mathfrak{M}_E\left(C_{a_1\cdots a_n}\left(\sum_{\gamma=1}^{n-1} \bar{x}_{a_\gamma}\right)\right)\mathfrak{M}_E(\bar{x}_{a_n}) = 0$$

故ニ　$\Delta \leqq n\sigma^2 P_r(E)$ ガ成立ツ。

今度ハ F_ν $(\nu = 1, \cdots\cdots, n)$ ナラ E ノ部分集合ヲ

$$\underset{\mu\leqq\nu-1}{Max}\left|\sum_{\gamma=1}^{\theta_\mu} \bar{x}_\gamma y_\gamma\right| \leqq c\sqrt{n}\,\sigma, \quad \left|\sum_{\gamma=1}^{\theta_\nu} \bar{x}_\gamma y_\gamma\right| > c\sqrt{n}\,\sigma$$

デ定メレバ，$\mu \neq \nu$ ナラ $F_\nu \frown F_\mu = 0$. 又上ノ場合ト同様 F_ν ノ特殊函数ヲ h_ν トスレバ．$h_\nu \cdot C_{a_1\cdots\cdots a_\mu}$ $(\mu > \nu)$ ハ高々 $x_1, \cdots\cdots x_{a_{\mu-1}}, y_1, \cdots\cdots, y_{a_\mu}$ ニノミ關係スルカラ，$\nu \leqq n$ ナラバ

$$\mathfrak{M}_{F_\nu}\left(\left(\sum_{\gamma=1}^{\theta_n} \bar{x}_\gamma y_\gamma\right)^2\right) = \mathfrak{M}_{F_\nu}\left(\left(\sum_{\gamma=1}^{\theta_\nu} \bar{x}_\gamma y_\gamma\right)^2\right)$$

$$+ \sum_{\mu=\gamma+1}^{n} \mathfrak{M}_{F_\gamma}(\bar{x}^2_{\theta_\mu}) \geqq c^2 n\sigma^2 \cdot P_r(F_\nu).$$

$$\text{故ニ}\ n\sigma^2 P_r(E) = \mathfrak{M}_E\left(\left(\sum_{\gamma=1}^{\theta_n} \bar{x}_\gamma y_\gamma\right)^2\right) \geqq \mathfrak{M}_{\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu}(\,''\,)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{M}_{F_\nu}(\;''\;) \geqq c^2 n\sigma^2 \sum_{\nu=1}^{n} P_r(F_\nu)$$

$$= c^2 n\sigma^2 P_r\Big((\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \in E,\ \underset{\mu \leqq n}{\mathrm{Max}} \Big|\sum_{\nu=1}^{\theta_\mu} \bar{x}_\nu y_\nu\Big| > c\sqrt{n}\,\sigma\Big)$$

ガ成立シ

$$\frac{P_r\Big((\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \in E,\ \underset{\mu \leqq n}{\mathrm{Max}} \Big|\sum_{\nu=1}^{\theta_\mu} \bar{x}_\nu y_\nu\Big| > c\sqrt{n}\,\sigma\Big)}{P_r(E)} \leqq \frac{1}{c^2}$$

即チEナル條件附確率ニ對シテ Kolmogoroff ノ不等式ガ成立スル。故ニ

$$\frac{P_r(E \frown F)}{P_r(E)} = 1$$

即チ求ムル(7)式ガ證明セラレタ。

原稿ヲ送ツタ後位相數學第三巻第一号ヲ受取リマシタ。其所ノ樋口氏「Kollective ノ存在ノ問題ニ就テ」ニ附ケ加ヘテ見テ戴ケレバ幸甚デス。