896. P. Levy ノ定理ノ証明ニ關シテノ一注意

國澤　清典（阪大）

P. Levy ノ定理トココデ云フノハ，確率論ノ基本定理トシテ知ラレテヰル。

「確率法則 $F_n(x)$ ノ系列ガ與ヘラレタトキ，各法則 $F_n(x)$ ニ對應スル特性函數 $\varphi_n(t)$ ガ函數 $\varphi(t)$ ニ收斂シ且ツ收斂ガ原点ノ近傍デ一様ナラバ，$\varphi(t)$ ハ或ル法則ノ特性函數デアリ $F_n(x)$ ハ $F(x)$ ニ法則收斂スル」ノコトデアル。[1]

コノ定理ノ証明ハ P. Levy 及ビ H. Cramer ノ書物ニ夫々ノ証明ガノッテヰル。此処デハソレラヨリモ理解シ易イ証明法ヲ得タノデ報告シマス。

証明ノ本質的ナ所ハ $F_n(x)$ ノ系列カラ $F'(x)$ ニ法則收斂スル部分系列 $\{F_{n_i}(x)\}$ ヲ選ンダトキ，$F'(x)$ ノ total variation 即チ

$$F'(\infty)-F'(-\infty)$$

ガ 1 ニ等シクナルトイフ所デアル。此レヲ次ノ様ニ考ヘル。

$$\Re\left(1-\varphi_{n_i}(t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\,dF_{n_i}(x)$$

（$\Re\left(1-\varphi_{n_i}(t)\right)$ ハ $1-\varphi_{n_i}(t)$ ノ real part ヲ示ス）

---

(1) 此ノ逆モ成立ツ。然シ逆ノ方ハ Helly ノ撰擇定理デ容易ニ証明サレル。

$$\frac{T}{2}\int_0^{\frac{2}{T}} \mathcal{R}(1-\varphi_{n_i}(t))\,dt \geqq \frac{T}{2}\int_{|x|\geq T} dF_{n_i}(x)\int_0^{\frac{2}{T}}(1-\cos tx)\,dt$$

$$\frac{T}{2}\int_0^{\frac{2}{T}} \mathcal{R}(1-\varphi_{n_i}(t))\,dt \geq \int_{|x|\geq T}\left(1-\frac{\sin\frac{2x}{T}}{\frac{2x}{T}}\right)dF_{n_i}(x)$$

$$\frac{T}{2}\int_0^{\frac{2}{T}} \mathcal{R}(1-\varphi_{n_i}(t))\,dt \geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq T} dF_{n_i}(x)$$

然ル＝ $\varphi_{n_i}(t)$ ハ原点ノ近傍デ一様ニ $\varphi(t)$ ニ收斂スル故ニ任意ノ $\delta>0$ ニ対シテ $n_i>N(\delta)$ ナルスベテノ n_i ニツキ

$$\delta+\frac{T}{2}\int_0^{\frac{2}{T}} \mathcal{R}(1-\varphi(t)) \geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq T} dF_{n_i}(x)$$

次ニ $\varphi(t)$ ノ連続ナルコトヨリ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $T\geq T'(\varepsilon)$ ナル $T'(\varepsilon)$ ヲ選ブト

$$\mathcal{R}(1-\varphi(t))<\varepsilon \qquad t\in\left[0,\frac{2}{T}\right]$$

依ツテ

$$\delta+\varepsilon \geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq T} dF_{n_i}(x)$$

今 T ト $-T$ ヲ $F'(x)$ ノ連続点ニ選ンデ置ケバ

$$1-(F'(T)-F'(-T)) \leqq \delta+\varepsilon$$

$\delta+\varepsilon$ ハ任意ナル故ニ此レハ $F'(\infty)-F'(-\infty)=1$ ナルコトヲ示ス。

以上