897. Linear semi-ordered space ニ就イテ

深宮　政範（阪大）

戰爭デ未着ノ Studia Math., 9 (1940) ニ Krein-Milman ガ次ノ定理ヲ証明シテヰル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ B－空間 E ノ共軛空間 $\bar{E}$ 内ノ有界ナ[1], regularly convex ナ部分集合ハ extreme points ヲ有ツ。

茲ニ集合 $K \subset \bar{E}$ ガ regularly convex デアルト云フノハ任意ノ $g \,\bar{\in}\, K$ ニ対シテ $\sup_{f \in K} f(x_0) < g(x_0)$ ナル $x_0 \in E$ ガ存在スルコトヲ云フ。K ガ convex set デアルトキ $f \in K$ ガドンナ $g, h \in K$ ニ對シテモ $f \neq \frac{1}{2}(g + h)$ デアレバ f ハ K ノ extreme point デアルト云フ。

最近吉田耕作氏ガ regularly convex set ト convex set トノ間ノ duality ヲ注意サレテ, elegant ナ interpretation ヲ與ヘラレタ。夫レハ談話 $\boxed{\qquad}$ ニヨツテ紹介サレテヰルノデ是非参照サレタイ。

茲デハ Krein-Milman ノ定理ノ証明ヲ述ベタイ。

---

1) 有界ト云フ條件ハ実際必要デアッタ. 例 $x_0 \in E$ ヲ fix シテ $f(x_0) = 0$ ナル $f \in \bar{E}$ 全体ノ集合

夫ニハ transfinite induction ヲ用フルノデアルガ,次ノ定理ガ必要デアル。

$\boxed{\text{定理 2}}$[2)] E ノ有界, convex ナ集合 K ガ regularly convex デアルタメノ必要十分ナ條件ハ K ガ $\overline{E}$ ノ functional トシテノ weak topology ニ関シテ bicompact ナ事デアル。

コノ定理ニツイテハ後デ別ニ直接ノ証明ヲスル。Šmulian ノ証明デ夫デ充分ナノデアルガ,後ニ述ベル方ガズット簡潔デアルト思フ。

定理 1 ノ証明:

凡テノ $f \in K$ ハ $\|f\| \leqq 1$ ト假定スル。Zermelo's axiom ヲ用ヒテ $x \in E$, $\|x\| \leqq 1$ 全体ヲ well-order シテ

(1) $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_\alpha, \cdots\cdots \qquad (\alpha < \eta)$

トスル(ソノ仕方ハ unique デハ無イ)

定理 2 ニヨッテ K ノ上デノ continuous $f(x)$ $(x \in E)$ ハ max. min ヲ attain スル. 今

$$\sup_{f \in K} f(x_0) = f_1(x_0), \quad f_1 \in K$$

ノ集合ヲ K_1 トスル。K_1 ガ唯一点 f_1 ダケカラ成レバ明カニ f_1^0 ハ extreme point デアル。(ドンナ $g, h \in K$ ニ対シテモ $f_1^{\ast}(x_0) > g(x_0), h(x_0)$; 従ッテ $f_1(x_0) \neq$

---

2) V. Šmulian, Über lineare topologische Räume, Rec. Math. Moscou, 7(1940)

$\frac{1}{2}(g(x_0)+h(x_0))$

モシK_1ガ一点以上含ンデ居レバ$f(x_\alpha)\neq const\ (f\in K_1)$ナル最初ノ$\alpha$ヲトリ，$\alpha=\alpha_1$トシテ

$$\sup_{f_1\in K_1} f_1(x_{\alpha_1})=f_2(\alpha_1),\quad f_2\in K_1$$

ナル集合K_2ヲ作ル，K_2ハ convex, closed set, $\subset K_1$. K_2ガ一点デアレバ夫ハKノ extreme point デアルコトハ明カデアル。K_2ガ一点デナケレバ$f(x_\alpha)\neq const\ (f\in K_2)$ナル最初ノ$\alpha$ヲ$\alpha_2$トスレバ

$$\sup_{f_2\in K_2} f_2(x_{\alpha_2})=f_3(\alpha_2),\quad f_3\in K_2$$

ナル convex, closed set K_3ヲ作ル。

一般ニ convex, closed sets ノ seq. $K\supset K_1\supset K_2\supset\cdots\cdots\supset K_\xi\supset\cdots\cdots$ガ$\xi<\xi_1\ (<\eta)$ナル凡テノ$\xi$ニ對シテ定義サレタトスル。

ξ_1ガ limit ordinal デナイトキ：

$f(x_\alpha)\neq const\ (f\in K_{\xi_1-1})$ナル様ナ最小ノ$\alpha$ヲ$\alpha_{\xi_1-1}$トシ，$\sup_{f\in K_{\xi_1-1}} f(x_{\alpha_{\xi_1-1}})=f_{\xi_1}(x_{\alpha_{\xi_1-1}})$, $f_{\xi_1}\in K_{\xi_1-1}$ナルf_{ξ_1}全体ノ作ル convex, closed set K_{ξ_1}ヲ作ル。

ξ_1ガ limit ordinal ノ時：$K\supset K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_\xi\supset\cdots\cdots\ (\xi<\xi_1)$ハ closed set ノ monotonic sequence デアルカラ$\prod_{\xi<\xi_1} K_\xi=K_{\xi'}$ハ leer デハ無

イ. 此ノ$K_{\xi'}$ヲ前ノ$K_{\xi,-1}$ノ代リニ用ヒテ同様ニ$K_{\xi,1}$ヲ定義スル。

以上ニヨッテ$\xi<\eta$ナル凡ユルξニ対シテ convex, closed sets K_ξ が定義サレ, $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots\cdots$ $\cdots \supset K_\xi \supset \cdots\cdots$. 依ッテ$\prod_{\xi<\eta} K_\xi$ヲ作レバ之ハ leer デハ無イ(bicompact!)

且ッ$\prod_{\xi<\eta} K_\xi$ハ唯一点カラ成立ツ。何トナレバ$\prod_{\xi<\eta} K_\xi$が2点f, gヲ含メバ$f(x) \neq g(x)$ナル$x = x_\alpha$が存在スル。今$\alpha < \alpha_\xi$トスレバ$f, g \in K_\xi$ニヨッテ$f(x_\alpha) = g(x_\alpha)$トナル筈デアルカラ

$f_0 = \prod_{\xi<\eta} K_\xi$ハ extreme point デアル. 任意ノ$g, h \in K$ヲトレバ$g, h \bar{\in} K_\xi$. ナルヤウナ最小ノ$\xi$が存在スル。従ッテ$\alpha > \xi$ナラバ$g(x_\alpha), h(x_\alpha) < f(x_\alpha)$, 従ッテ$f \neq \frac{1}{2}(g+h)$.

2. 定理. $\bar{E}$ノ有界, convex ナ集合Kが regularly convex デアルタメノ必要十分ナ條件ハ

Kが$\bar{E}$ノ functional トシテノ weak topology ニ関シテ bicompact ナ事デアル。

証明. 便宜ノタメ$\|f\| \leqq 1$ $(f \in K)$ト假定スル. $\bar{E}$ノ functional トシテノ weak topology ヲ考ヘルコトハ次ノ事ト同等デアル。

Sヲ$\|x\| \leqq 1$ナル$x \in E$ノ集合トシ, Sノ上デ定義サレタ凡ユル有界ナ実数値函数$(|g(x)| \leqq 1)$全体ノ

集合ヲ B(S) デ表ハス　B(S) ニ對シテ topology ヲ近傍系

一般ニ夫ニハ所謂 regularly convex ナ集合ハ weakly closed デアルコトヲ考ヘレバ，K ハ B(S) デノ closed — 從ッテ bicompact ナ sub set デアルコトガ云ヘル。(例ヘバ $f \in E$ ガ K ノ condensation point ノ一ツトシ，且ツ $f \in K$ トスレバ，假定カラ $\alpha = \sup_{f' \in K} f'(x_0) < f(x_0)$ ナル $x_0 \in E$ ガアル。($\|x_0\| \leqq 1$)。從ッテ $f(x_0) - f'(x_0) \geqq f(x_0) - \alpha > 0$ ($f' \in K$)，故ニ $|f(x_0) - g(x_0)| < \frac{1}{2}(f(x_0) - \alpha)$ ナル f ノ近傍ハ K ト disjoint トナル)。

逆ニ K ガ B(S) デ bicompact ナラバ regularly convex

$$\{U\} \quad U = U(f_0; x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n; \varepsilon)$$

$$= \underset{f \in B_S}{E}\left[|f_0(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n\right]$$

ニヨッテ定義スレバ B(S) ハ区間 $-1 \leqq t_x \leqq +1$, $x \in \Omega$ ノ積空間ト homeomorphic デ，從ッテ bicompact top. space トナル。特ニ B(S) ノ中デ $\{f(x)\}$, $f \in E$ ($\|f\| \leqq 1$) ナル如キ点全体ハ B(S) ノ topology ニツイテ closed, convex — 即チ weakly closed, convex — ナ集合トナル。(之ヲ F デ表ハス)

以下

K ヲ B(S) ニテ考ヘル。

Kガ regularly convex デアレバ K ハ bicompact デアル。F（又ハB）ハ bicompact デアルカラ completely regular デアル．従ッテ $g\bar{\in}K$ ヲ與ヘルトFノ上デノ（又ハB）continuous function $\varphi(f)$ ガ存在シテ $\varphi(g)=0$, $\varphi(K)=1$, $0\leqq\varphi(f)\leqq 1$ トナル．故ニ g ノ近傍 U ヲ適當ニトレバ U·K ハ空集合トナル。

今 U ヲ

$$U: \quad |g(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon, \quad i=1,2,\cdots\cdots,n$$

トスル。$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ニヨッテ K 及ビ g ヲ n 次元ノ Euclid 空間 R^n ニ次ノヤウニ寫像スル．任意ノ $f\in K$ ニ對應サセルニ $\varphi(f)=(f(x_1), f(x_2), \cdots\cdots, f(x_n))$ ヲ以テスレバ K ハ φ ニヨッテ R^n 内ノ有界, convex, closed ナ集合ニ移サレル．然ルニ U ノ定義カラ $\varphi(g)$ ハ $\varphi(K)$ ニハ屬サナイ．従ッテ $\varphi(g)$ ヲ通ル hyperplane $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i=1$ ヲ適當ニトレバ

$$\sup_{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\varphi(K)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i<1, \quad 且 \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i=1$$

但シ $(\eta_1,\cdots\cdots,\eta_n)=(g(x_1), g(x_2),\cdots\cdots, g(x_n))$

ナル様ニ出來ル。依ッテ $x_0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ ヲトレバ

$$\sup_{f\in K} f(x_0)<g(x_0)$$

依ッテKハ regularly convex デアル。