903. 「Lie algebra ニ関スル Levi ノ定理」ノ補遺

安倍　亮（東大）

I. 紙上談話會第204号，談話887「Lie algebra ニ関スル Levi ノ定理」ニ於テ，筆者ハ Levi ノ定理

「Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ノ Radikal $\mathfrak{r}$ ニ関スル Restklassen ノ代表ガ，ソレ自身 Teilalgebra $\mathfrak{f}$ ヲナス様ニトレル．即チ Modul トシテ $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{f}$（直和）」

ノ基礎体 P ガ任意ノ標数 0 ノ体ノトキノ証明ヲ述ベタ。ソレハ P ガ複素数ノバアヒノ Whitehead ノ証明ヲ一般化シタノデアッタ。Whitehead ノ証明ハ P トシテ任意ノ標数 0 ノ代数的閉体ヲトッテモ全然変更ヲ要シナイ，従ッテ P ガ代数的閉体ノバアヒハ既ニヨク知ラレテ居ルト見テヨイ。ソレヲ一般ノ体ニ拡張スルタメニ，Whitehead ノ証明中ニアラハレル．表現ノ所謂「Casimir 行列」ノ性質ヲ少シク精シク調ベタノガ，前記談話ノ方法ダッタ。所ガヨク考ヘテ見ルト、P ガ代数的閉体ノバアヒニ Levi ノ定理ヲ既知トスレバ，ソレヲ一般化スルニハ殆ンドーコトノ注意デ済ムノデアル。従ッテ前ノ長タラシイ談話ハ別ニ新シイ事実トイフモノハナク、単ニ Whitehead ノ論文ヲ（主トシテ筆者自身ニ）分リヤスイ様ニ書キ直シテ紹介シタニ過ギナイ事ニナル訳デアル。

P ヲ一般ニスルニハ次ノ様ニスレバヨイ：

$\mathfrak{R} = Pu_1 + \cdots + Pu_r + Pv_1 + \cdots + Pv_g$ ハ標数 0 ノ基礎体 P ノ上ノ Lie 環，$\mathfrak{r} = Pv_1 + \cdots + Pv_g$ ヲソノ Radikal トスル。P ヲ含ム代数的閉体ヲ P^* トスレバ $\mathfrak{R}_{P^*}$ ニ於テハ Levi ノ定理ノ成立ツコトガ分ッテ居ルトスル。即チ u_i ノ代リニ適当ニ

(1) $u_i^* = u_i + t_i^\alpha v_\alpha, \quad 1 \leqq i \leqq r \qquad \underset{\sim\sim\sim}{t_i^\alpha \in P^*}$

ヲ Basis ニトレバ

$$\mathfrak{S}^* = P^* u_1^* + \cdots + P^* u_r^*$$

ガ $\mathfrak{R}_{P^*}$ ノ Teilalgebra ニナル，即チ

(2) $u_i^* \circ u_j^* = c_{ij}{}^k u_k^*$

ノ形ニナルト云フノデアル。

一般ニ $\mathfrak{R}$ ニツイテ定理ヲ証明スルノデアルガ，例ニヨッテ Radikal $\mathfrak{r}$ ガ 0 ト $\mathfrak{r}$ 以外ニ Ideal ヲ含マナイ場合，即チ $\mathfrak{r}$ ガ $\mathfrak{R}$ ノ minimal ナ Ideal デアル場合ダケニ限ッテヨイ．（前記談話 P. 406 頁）

$\mathfrak{r}$ ガ minimal ナ Ideal ノバアヒヲ假定スレバ，アトハ $\mathfrak{r}$ ノ階数ニ関スル帰納法デ証明サレル。*) 即チ $\mathfrak{r}$ ガ minimal デナケレバ，$\mathfrak{r}$ ニ含マレル最大ナ ($\mathfrak{R}$ ノ) Ideal ヲ $\mathfrak{r}_1$ トスル。$\mathfrak{R}/\mathfrak{r}_1$ ノ Radikal $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}_1$ ハ minimal ナ Ideal 故ニ $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{S}_1/\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}/\mathfrak{r}_1$ ナル Teilalgebra $\mathfrak{S}_1$ ガアル。$\mathfrak{S}_1$ ノ Radikal $\mathfrak{r}_1$ ハ $\mathfrak{r}$ ヨリ階数ガ小サイ

---

*) 前談話デハ $\mathfrak{r}$ ノ Kompositionsreihe ノ長サ c ニ関スル帰納法ヲ用ヒタガ，ソレハ正シクナカッタ。$\mathfrak{r}_1$ ノ c ガ $\mathfrak{r}$ ノ c ヨリ小サイカドウカ分ラナイ。

カラ，帰納法ノ假定ニヨリ $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} + \mathfrak{n}$ ナル部分環 $\mathfrak{r}$ ガアル。$\mathfrak{r}$ ハ $\mathfrak{r}_1/\mathfrak{n}_1$ ノスベテノ Klasse ノ代表ヲ，従ッテ $\mathfrak{R}/\mathfrak{n}$ ノスベテノ Klasse ノ代表ヲ含ム，即チ $\mathfrak{R}=\mathfrak{r}+\mathfrak{n}$。

従ッテ今後 $\mathfrak{n}$ ハ minimal ナ Ideal デアルトスル。$\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}\circ\mathfrak{n} \neq \mathfrak{n}$ ハ矢張 $\mathfrak{R}$ ノ Ideal デアルカラ $\mathfrak{n}'=0$，即チ $\mathfrak{n}$ ハ可換デアル。故ニ $\mathfrak{R}$ ノ構造ハ

$$(3)\quad u_i \circ u_j = c_{ij}^{k} u_k + a_{ij}^{\alpha} v_\alpha\,;\quad u_i \circ v_\alpha = h_{i\alpha}^{\beta} v_\beta\,;$$
$$v_\alpha \circ v_\beta = 0$$
$$c_{ij}^{k},\ a_{ij}^{\alpha},\ h_{i\alpha}^{\beta} \in P\,;\quad 1 \leqq i, j, k \leqq r,$$
$$1 \leqq \alpha,\ \beta \leqq g$$

ノ形ニナル。証明スベキコトハ u_i^* ヲ (1) ノ形ニ適当ニトリ，但シ $t_i^\alpha \in P$ トシテ (2) ヲ満足セシメルコトデアル。(2) ヲ (3) ヲ用ヒテ書キナホセバ

$$(4)\quad a_{ij}^{\beta} + h_{i\alpha}^{\beta} t_j^{\alpha} - h_{j\alpha}^{\beta} t_i^{\alpha} - c_{ij}^{k} t_k^{\beta} = 0$$

ナル聯立一次方程式ニナル。未知数 t_i^α ノ解ガ P^* ニ於テハ存在スルコトガ假定サレテ居ルノデアル。然シ (4) ノ係数ハ全部 P ニ属スルノデアルカラ，解ガ P^* デ存在スレバ P デモ存在スル。従ッテ定理ハ証明サレタ。

以上ハ，実ハ assoziative algebra ノ場合ノ之ニ相当スル定理ノ証明ヲ見テ居テ気ガ付イタノデアル。(Deuring: Algebra 24頁) assoziativ ノバアヒデモ先ヅ Radikal $\mathfrak{n}$ ガ minimal カ，ソコマデ制限シナクテモ $\mathfrak{n}^2 = 0$（上ノ $\mathfrak{n}\circ\mathfrak{n}=0$ ニ相当）ノバアヒニ限ッテ

イヽコトガ，上ト全然同ジ証明デ出来ル。ソシテ先ヅ代数的閉体 P^* ノバアヒニ証明シテオケバ（ソレハ Lie 環ノトキト八勿論全然チガフガ）P^* カラ P ヘ持ッテ来ルノハ今述ベタ Lie 環ノ場合ノ証明ガ之レ亦ソックリ其儘通用スル。此ノ様ニ考ヘタ方ガ，Deuring ノ本ニアル Körper ノ Basis ヲ使ッテヰル証明法ヨリ理解シ易イ様ニ思フ。

ナホ之レハ餘談デアルガ，$P^* \longrightarrow P$ ヲ $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{N} = 0$ ニ限ラナイデイキナリヤラウト思フト (3) 式ノ $v_\alpha \circ v_\beta$ ガ必ズシモ 0 デナイタメ (4) ニ t ノ二次ノ項ガアラハレテ，今ノ論法ハ使ヘナイ。

II. モウ一ッ追加。　前談話 407 頁 (III)，

$\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ ガ $\mathfrak{N}$ ニ生ズル表現 ϑ ガ既約零表現ノ場合ノ証明ハ，Whitehead ノヲソノ儘取ッタノデアルガ，398 頁ノ Lemma 2「準単純ナ Lie algebra ノ ableitung ハ inner デアル」ヲ使ヒ非常ニ巧妙デアルガ，巧妙スギテドウシテ思ヒ付イタノカヨク分ラナイ。次ノ様ニ考ヘル方ガ分リ易イト思フ。

表現 ϑ ガ零表現ナラ，$x \in \mathfrak{R}$，$v \in \mathfrak{N}$ ニ對シ常ニ $v \circ x = 0$，故ニ $y \equiv y' (\mathfrak{N})$ ナラ $y \circ x \equiv y' \circ x$。シタガッテ $\mathfrak{N}$ ノミナラズ $\mathfrak{R}$ 全体ガ $\overline{\mathfrak{R}}$-Modul ト考ヘラレル。$\mathfrak{N}$ ハソノ zulässig ナ Teilmodul。所ガ $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ表現ハ完全可約ダカラ

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$$

ナル zulässig ナ Teilmodul $\mathfrak{S}$ ガアル。$\mathfrak{S}$ ハ $\overline{\mathfrak{R}}$-Modul

従ッテ$\mathfrak{R}$ノIdealデアル。

―― 以 上 ――

表現ノ完全可約性ヲ使ッタキルノダカラ，本質的ニ簡単ニナッタ訳デハナイ。尤モ完全可約性ト云ッテモ一方ノ既約成分ガ零表現ノバアヒダケシカ要ラナイ。更ニ$\mathfrak{R}/\mathfrak{w}$ヲ単純環ニ分ケテ

$$\mathfrak{R}/\mathfrak{w} = \mathfrak{R}_1/\mathfrak{w} + \cdots\cdots + \mathfrak{R}_s/\mathfrak{w}$$

トシ，各$\mathfrak{R}_i$ニツイテ証明スレバ，コノトキハ$\overline{\mathfrak{R}_i} = \mathfrak{R}_i/\mathfrak{w}$ノ零表現以外ノモウ一ツノ成分ナル正規表現ハ既約トナリ，従ッテ

$$\begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \qquad \vartheta_1 : \text{既約}$$

ノ形デ表現ノ完全可約性ヲ云ヘバヨイ。ソレハ吉田氏：リー環論42頁定理25デ，Casimir行列ヲツカッテ簡単ニ証明サレル。即チ

表現ノ一般ノ行列ヲ$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$トスル。Casimir行列ハ

$\begin{bmatrix} cE & 0 \\ F & 0 \end{bmatrix}$ノ形，$cE$ハ$\vartheta_1$ノCasimir行列デ$c \neq 0$。之ガ表現ノ行列ト可換ナコトカラ$B = c^{-1}FA$

従ッテ $$\begin{bmatrix} E & 0 \\ c^{-1}F & E_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & \hat{0} \\ c^{-1}F & E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

―― 以 上 ――