907. ふろべにうす多元環ニツイテ補足(一)
[右右ノいでやる束ガ逆同型ナ環ニツイテ]

中山　正（阪大）

主定理ノ逆ヲ少シ違フ観点カラ見ル. 結果ハソレト互ニ相補ッテ孰レモ他ヲ含マヌ。

Aヲアル体Fノ上ノ多元環トスル. Aガ1ヲ有シ且ツソノ左及ビ右ノ正規表現$L(a)$, $R(a)$, $(a\in A)$ガ互ニ同値デアル時Aヲ<u>ふろべにうす環</u>（<u>F環ト略</u>）トヨブ。少シ弱ク、1ヲ有シ且ツ$L(a)$ト$R(a)$ノ中ノ直既約成分ガ重複度ヲ除ケバ一致スル場合ニハAヲ<u>準F環</u>トヨブ. Ann. Math. 40ノ論文（以下 Part I ト略）デノ最モ主ナ結果ハ次ノコトデアッタ： Aガ準F環デアレバ、相殺関係ガ左右いでやるノ間ノ一對一對應ヲ與ヘル。即チ, 今AノＳ部分集合Sニ左カラ乘ジテ0ニナル元ノ集合ヲ$l(S)$, 右カラ0ニスルノヲ$r(S)$トカケバ

$$\alpha)\quad l(r(\mathfrak{l}))=\mathfrak{l},\quad r(l(\mathfrak{r}))=\mathfrak{r}$$

ガスベテノ左いでやる$\mathfrak{l}$, 右いでやる$\mathfrak{r}$ニ成立ツ. 逆ニ上ノ関係ガスベテノ巾零単純左又ハ右いでやる及ビ根基N, 零いでやるニ對シテ成立ツナラバAハ準F型デアル。更ニAガ眞ニF型ナラバα)ヨリ強ク

$$\beta)\quad (\mathfrak{l}:F)+(r(\mathfrak{l}):F)=(A:F)$$
$$=(\mathfrak{r}:F)+(l(\mathfrak{r}):F)$$

ガ成立ツ. 逆ニα), β)ガ上ニ述ベタ如キいでやるニツキ成

立ツナラAハF環デアル。

コノ逆ノ方ハ弱メテ、スベテノいであるニツキ α)が，又ハα)，β)が成立ツト假定スレバ勿論成立ツ。然ラバ，今度ハ上ノ如ク相殺関係デト規定セズ，單ニ左右いであるノ間ニ一對一對應ガアリ⊇ガ⊆ニナルトシタ場合ハ如何？ 答ハ肯定的，即チ

$\boxed{\text{定理}}$ Aノ左いであるノナス束ト右いであるノナス束トが互ニ逆同型ナラバAハ準F環デアル．更ニソノ逆同型デ對應スル左右いであるノ（Fニ対スル）階數ノ和がAノ階数ニ一致スル（即チ階数が *dual*）ナラバAハF環デアル。

上ニ述べタ定理ノ前半ト組合セテ

$\boxed{\text{定理}}$ Aノ左右いである束ノ間ニトモカクー ツノアル逆同型がアレバ、実際相殺関係デモ逆同型が生ズル，更ニ対應スル左右いであるノ階数が *dual* ナル如キ逆同型ガアルナラバ、相殺関係モマタソノヤウナ逆同型ヲ與ヘル。

トモカク以上デ 左右いである束が逆同型ナル如キ多元環がスッカリ特徴ヅケラレタワケデアル。ナホ，コレラノコトハ実ハ多元環ニカギラズ，最小條件ヲミタス環ニツイテ(ソノ場合ノF環，準F環、及ビ階數ノ代用品ニツイテハ近刊ノ *Part* II（*Ann. Math.*）ヲ參照サレタイ）モ同様ニ成立ツ。

以上ノ定理ノ証明ハ，ハジメニ述べタ定理ノ逆ノ部分ヨ

リムシロ簡單デアル。(両方ノ結果ハドレモ他ヲ覆ツテハヰナイ)。而シテ事実次ノヨリ強イ定理ガ成立ツ。

$\boxed{\text{定理}}$ Aノ完全可約左いでやるノナス束ガAノ根基Nヲフクム右いでやるノナス束ト逆同型デアリ、マタソノ左右トリカヘタコトガ成立ツナラバAハ準F環デアル。更ニソレラノ逆同型ニ於テ對應スル左右いでやるガ*dual*ナ階數ヲモツナラバAハF環デアル。

(Nヲフクム右いでやるトハ即チ最大右いでやるノ截分ニナルモノデアルカラ *oben* ニ完全可約ト云フベキデアラウ)

$\boxed{\text{証明}}$ ノタメニ一寸復習。Aヲ任意ノ多元環、NヲソノN根基トシ、$e_{\kappa,i}$ ($\kappa=1,2,\cdots\cdots,k$; $i=1,2,\cdots\cdots,f(\kappa)$) ヲ互ニ直交スル原始巾等元ノ系デ最大ノモノトスル。タダシ添字ハ $Ae_{\kappa,i}$ ト $Ae_{\lambda,j}$ ナル左いでやるハκトλガ同ジトキ且ツソノトキニ限ッテ作用同型ナル如クトッテアルトスル。然ラバ右いでやるニツイテモ同ジコトガ成立ツ。更ニマタNデノ剰餘系ニウツテ $\bar{A}\bar{e}_{\kappa,i}$, $\bar{A}\bar{e}_{\lambda,j}$ ナル單純加群ニツイテモ同ジデアル。*Part* Iデ次ノ補題ヲ証明シタ。(実ハコレガ表現論カラ構造論ヘウツル点デアル)

$\boxed{\text{補題}}$ Aハ1ヲ有スルトスル。Aガ準FナルタメニハПа次ノ如キ$(1,2,\cdots\cdots,k)$ノ置換$(\pi(1),\pi(2),\cdots\cdots,\pi(k))$ノ存在ガ必要且ツ充分：

i) $e_{\kappa,1}A$ハ唯一ノ單純部分右いでやる $\mathfrak{r}_{\kappa,1}$ ヲ有シ、且ツソレハ $\bar{e}_{\pi(\kappa),1}\bar{A}$ ニ同型

ii) $Ae_{\pi(k),1}$ ハ唯一ノ單純部分左いでやる $l_{\pi(k),1}$ ヲ有シ，且ツソレガ $\bar{A}\bar{e}_{k,1}$ ニ同型．

更ニF環デアルタメニハ i), ii) ノ外ニ更ニ

iii) $f(k) = f(\pi(k))$

ヲミタスコトガ必要且ツ充分デアル。

次ニ、次ノ補題ハ Part II デ証明シタガ一寸順序ガ転倒シタ点ガアルカラ繰返ス。

$\boxed{\text{補題}}$ 上ノ定義デ ii) ノ最後ノ條件ハ除イテモヨイ．即チソレハ i) 及ビ, ii) ノ前半カラ出ル。

証明： $l(N)$, $r(N)$ ハ勿論共ニ両側いでやるデアル $l(N) = \sum e_{k,i}\, l(N)$ デアリ、コヽニ $e_{k,i}\, l(N) = e_{k,i}A \cap l(N)$ ハ $e_{k,i}A$ ノ最大完全可約部分右いでやるデアル．（$l(N)$ ハ A ノ最大ナ完全可約右いでやるデアル）．故ニソレハ假定 i) カラ單純デ且ツ $\bar{e}_{\pi(k),1}\bar{A}$ ト同型、故ニ $e_{k,i}\, l(N) = e_{k,i}\, l(N) E_{\pi(k)}$（タヾシ $E_{\pi(k)} = \sum_i e_{\pi(k),i}$）デアルガ入キ $\pi(k)$ ナル E_λ ヲカケレバ 0 ニナル。ヨッテ $E_k\, l(N) E_\lambda$ ハ $\lambda = \pi(k)$ ノトキ $E_k\, l(N)$ デアリ、ソウデナケレバ 0. 故ニ今度ハ k ノ方ヲウゴカシテ

$$
\begin{aligned}
l(N) E_{\pi(k)} &= \sum_\mu E_\mu\, l(N) E_{\pi(k)} \\
&= E_k\, l(N) E_{\pi(k)} = E_k\, l(N)
\end{aligned}
$$

トナル．スナハチコノ等式ノ両辺ハ両側いでやるデアル．更ニコレガ單純ナルコトヲイフ。ソノタメ d ヲソノ任意ノ元（$\neq 0$）トスル． $d = \sum_i e_{k,i}\, d$ デ少クモ一ツノ

$e_{k,i}d$ ガ $\neq 0$.

例ヘバソレヲ $e_{k,p}d$ トスル. シカラバ $e_{k,p}dA = e_{k,p}l(N)$ デアル. ナゼナラ右辺ハ単純右いでやるダカラ。ヨッテ $AdA = Ae_{k,p}l(N) \supseteq E_k l(N)$ (ナゼナラ $e_{k,q} = c_{k,qp} e_{k,p}$ ナル $c_{k,qp}$. (行列単位ノ系) ガアルカラ). 即チコレハ我々ノ $E_k l(N)$ ナル両側いでやるガ単純ナコトデアル。ヨッテ特ニソレハ左いでやるトシテモ完全可約デアル。(ナゼナラ、ソノ最大完全可約部分左いでやるハ両側いでやるナルコトガ容易ニ分ルカラ) ソレハ $E_k l(N)$ ガ $r(N)$ ニ含マレル事デアル、k ニ任意ダカラ $l(N) \subseteq r(N)$.

ii) ノ前半ニヨル $l_{\pi(k),1}$ ハ唯一ノ単純部分左いでやるダカラ最大完全可約部分左いでやる $r(N)e_{\pi(k),1}$ ト一致スル. 故ニ $e_{k,1} l_{\pi(k),1} = l_{k,1} r(N) e_{\pi(k),1}$ デアリ, コレハ上記ニヨリ $\supseteq e_{k,1} l(N) e_{\pi(k),1}$. コレハ $= \mathfrak{r}_{k,1} e_{\pi(k),1} \neq 0$. (條件 i) 故ニ $l_{\pi(k),1} \cong \bar{A}\bar{e}_{k,1}$ デナケレバナラヌ。即チ ii) ノ後半ガ出タ。

サテ, 定理ノ証明ハ容易: 完全可約左いでやるノナス束ヲ Λ, 根基 N ヲフクム (即チ oben ニ完全可約ナ) 右いでやるノ束ヲ P トスル. 仮定ニヨリソノ間ニ逆同型ガアル. コレ等ノ束ハ *modular* 且ツ *complemented* デアルガ、ソノ中ノ独立ナ原子ノ数ヲカゾヘル. P ニオイテハソレハ $\bar{A} = A/N$ ノ独立ナ右いでやるノ数. 即チ $\sum f(k)$ デアル. Λ ニツイテシラベルタメ A ヲ直和

$$A = Ae_{1,1} + Ae_{1,2} + \cdots\cdots + Ae_{k;f(k)} + \mathfrak{l}_0$$

ト分解スル（コヽニ $\mathfrak{l}_0$ ハ根基ニフクマレタアル左いでやるデアル）．$\sum f(k)$ 個各左いでやる $Ae_{k,i}$ が少クモ一ツノ単純左いでやる，即チ Λ ノ原子ヲ有シ、ソレ等ハ独立デアル．ヨツテ Λ ニオケル數ト一致スルノダカラソレハ丁度一ツ、即チ唯一ツデアリ、シカモ $\mathfrak{l}_0$ ハ消ヘテシマハネバナラナイ。即チ(ii)ノ前半ハスデニ云ヘタ。

ソノ唯一ツノヲ $\mathfrak{l}_{k,i}$ デアラハス．シカラバ同ジ k ニ屬スルソレラが同型ノコトハ明カダが、更ニ違フ k ニ對スルモノハ同型デナイコトヲイフ．ソレニハ Λ 及ビ P ヲ（irreducible）ナ「射影幾何」ニ分解スル數ヲカゾヘル。

ソレハ互ニ背景的デナイ原子ノ數デアル．シカルニ二ツノ単純左いでやるノ共ハソレラが同型ノトキ、且ツソノ時ニカギリ第三ノソレヲ含ミ、從ツテ配景的デアル．ヨツテ上記ノ数ハ Λ デハ高々 t デアリ，P デハ丁度 t デアル．故ニ Λ デモ丁度デアリ、シタがッテ違フ k ニ對スル $\mathfrak{l}_{k,i}$ ハ同型デナイ。

全然同様ノコトが左右トリかヘテイヘル。故ニ上ノ補題カラAが準F環デアル．（単位元1ノ存在ハ $\mathfrak{l}_0 = 0$ 及ビソレト同様ナ $\mathfrak{r}_0 = 0$ カラ）

次ニ更ニ對應スル左右いでやるノ階數が dual トスル。

Λ ト P ノ逆同型ヲ $\sigma : \mathfrak{l} \to \mathfrak{r} = \sigma(\mathfrak{l})$ $(\mathfrak{l} \in \Lambda)$ デ

表ハサウ。

今 $r(N)E_{\pi(\kappa)}$ ヲ考ヘル。既ニ知ルゴトク、コレハ $\overline{A}\overline{e}_{\kappa} \cong r(N)e_{\pi(\kappa),1}$ ト同型ナ単純左いでやるスベテノ和デアル。

即チ $r(N)e_{\pi(\kappa),1} = l_{\pi(\kappa),1}$ ト配景的ナ原子全部ノ和デアル. 故ニソレニ対應スル $\sigma(r(N)E_{\pi(\kappa)})$ ハトモカク $A/\mathfrak{v}$ ガ互ニ同型ナル如キ最大右いでやる $\mathfrak{v}$ ノナスアル最大ノ系ノ截分デアル. スナハチ適當ナ λ ヲトレバ $N \cup (1-E_{\lambda})A$ トナル. シカルニ $r(N)E_{\pi(\kappa)}$ ハ上述ニヨリ $f(\pi(\kappa))$ 個ノ独立ナ原子ノ和デアル. 他方 $N \cup (1-E_{\lambda})A$ ハ $f(\lambda)$ 個ノ oben ニ独立ナ最大元ノ截分デアル. 故ニ $f(\lambda) = f(\pi(\kappa))$ トナル。

シカルニ假定ヨリ

$$\begin{aligned} f(\kappa)\cdot f(\pi(\kappa))\cdot(\overline{e}_{\kappa,1}\overline{A}\overline{e}_{\kappa,1} : F) &= (r(N)E_{\pi(\kappa)} : F) \\ &= (A/\sigma(r(N)E_{\pi(\kappa)}) : F) \\ &= (A/(N \cup (1-E_{\lambda})A) : F) \\ &= f(\lambda)^2\cdot(\overline{e}_{\lambda,1}\overline{A}\overline{e}_{\lambda,1} : F) \end{aligned}$$

デアル（第二ノ等号ガ仮定）、故ニ併セレバ $f(\kappa) = f(\pi(\kappa))$ トナル. 何故ナラ $\overline{e}_{\kappa,1}\overline{A}\overline{e}_{\kappa,1}$ ト $\overline{e}_{\lambda,1}\overline{A}\overline{e}_{\lambda,1}$ ハ同型. ナゼナラ一方ノ歪体ノ射影幾何ニ逆同型ナ射影幾何ノ係数歪体ニ逆同型ダカラデアル. コレデ (iii) モ出来テ, A ガ F 環デアル。