912. 單位ヲ有スル Vector-lattice ニ就イテ, I

吉田　耕作（阪大）

Vector-lattice ノ定義[1] 實數体（実数ヲ α, β, γ, ----デ表ハス）ヲ係數トスル加法群 E（ソノ要素ヲ x, y, z, ----- デ表ハス）ニ於テ次ノ條件ヲ満足スル semi-order $\geqq$ が定義サレテルトキ E ヲ Vector-lattice ト呼ブ：

(1) $f \geqq g$ ト $f-g \geqq 0$ トハ同等[2]

(2) $f \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$ ナラ　$\lambda f \geqq 0$

(3) $f \geqq 0$, $-f \geqq 0$ ナラ　$f=0$

(4) $f \geqq 0$, $g \geqq 0$ ナラ　$f+g \geqq 0$

(5) semi-order $\geqq 0$ ノ意味デ E ハ lattice ヲ作ル．即チ全テノ f ニ對シ join $f \vee 0$ が定マル。[3]

Unit I. vector-lattice E ニ於テ $I > 0$ が存在シ，全テノ $x \in E$ ニ對シ適當ニ α, β ヲ撰ベバ $\beta I \leqq x \leqq \alpha I$ ト出來ルトキ I ヲ unit ト呼ブ。

以下 unit I ヲ有スル vector-lattice ヲ function

---

(1) G. Birkhoff: Lattice theory 参照.

(2) $f \geqq 0$ 且ツ $f \neq 0$ ヲ $f > 0$ デ表ハス.

(3) $f \vee 0 = f^{+}$, $f \wedge 0 = f^{-}$,
$f^{+} - f^{-} = |f| = f \vee (-f)$ 等.

space トシテ表現スルコトヲ考ヘテミル。

<u>*Lemma* I.</u>　Eノ線状部分空間Nハ，$f \in N$ ナルトキ $|x| \leqq |f|$ ナル $x \in N$，ナル條件ヲ滿足スルトキニ限ッテ $E \to E/N$ ガ *linear* + *lattice-homomorphism* ヲ與ヘル．カヽル線状部分空間Nヲ *normal* デアルト云フ (Birkhoff: loc. cit. 109)。

<u>*Lemma* 2.</u> 任意ノ *normal linear subspace* (*n. l. s.*) $N \neq E$ ニ對シNヲ含ム *maximal n. l. s.* $\neq E$ ガ存在スル。

<u>證.</u>　E/N ハEト同ジ條件ヲ滿足シ且ッ $E \to E/N$ ニ於ケルIノ像ハ E/N ノ *unit* ニナル (*Lemma* 1)．次ニ $E \neq \{\alpha I\}$ ナラEハ *n. l. s.* N ($\neq 0, E$) ヲ有スルコトヲ示ス。

何者，假定カラ $x \in E$ 存在シ $x \neq \gamma I$ (*for any* γ)．$\alpha I \geqq x$ ナル如キ α ノ *inf* ヲ α'，$x \geqq \beta I$ ナル如キ β ノ *sup* ヲ β' トヲクト $\alpha' I \geqq x \geqq \beta' I$ 且ッ $\alpha' > \beta'$．ヨッテ $x - \frac{\alpha+\beta}{2} I \gtreqless 0$，即チ $\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} I\right)^+ \neq 0$，

$\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} I\right)^- \neq 0$．今 $\gamma\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} I\right)^+ \geqq |y|$ ナル如キ y ノ全体Nヲ考ヘレバ明カニNハ *n. l. s.* 且ッ $N \neq E$ ($\because N \ni \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^-$ ダカラ)。

最後ニ *maximal n. l. s.* ノ存在ハ以上カラ *transifinite induction* デ證明スル．即チ上カラ

linear ナ lattice-homomorphism ヲ與ヘル congruence relations (defined by a n. l. s. N_α) ノ transfinite ナ系列ガ與ヘラレル:

$$N_0, N_1, N_2, \cdots\cdots, N_\alpha, \cdots\cdots \quad (N_\alpha \subset N_{\alpha+1} \neq E),$$
$$\alpha < \omega$$

コノトキ limit ordinal ω ニ對シテハ $x \equiv y \pmod{N_\omega}$ ヲ $x \equiv y$ (mod for some N_α, $\alpha < \omega$) デ N_ω ナル n. l. s. ガ定義デキ (Lemma 1), $N_\alpha \subset N_\omega$, 且ツ $N_\omega \neq E$ ($\because$ $N_\alpha \neq E$ 即チ $I = 0 \bmod N_\alpha$, $\alpha < \omega$) デアル。ヨツテ transfinite induction デ證了デアル。

<u>Lemma 3.</u> $x \neq 0$ ナラ x ヲ含マヌ maximal n. l. s. N 存在ス.

<u>證明</u>. $|x| \geqq \alpha I$, $\alpha > 0$ ナラ Lemma 2 カラ明カ. 若シカヽル $\alpha > 0$ ガ存在シナイナラ $x^+ > 0$, 且ツ $x^+ \geqq \alpha I$ ナラ $\alpha \leqq 0$ ト假定シテモ一般性失ハヌ。(1) コノトキ $\beta I \geqq x^+$ ナル β ノ inf. ヲ γ トヲキ $I \geqq \dfrac{x^+}{\gamma}$, $\gamma > 0$. 然ラバ

$I - \dfrac{x^+}{\gamma} > 0$ 且ツ $\left(I - \dfrac{x^+}{\gamma}\right)$ ハ定義カラ $\geqq \delta x^+$ for any $\delta > 0$. ヨツテ $\varepsilon\left\{I - \dfrac{x^+}{\gamma}\right\} \geqq |y|$ ヲ満足スル y ノ全体 N ハ n. l. s. デ且ツ x^+ ヲ含マヌ。然シテ Lemma 2 ニヨリ, N ヲ含ム maximal n. l. s. $\neq$ E ヲ作ルト

---

(1) $-x^-$ ヲ x^+ ノ代リニ使ッテ.

之ハ x^+ ヲ含マズ。（何者，x^+ ヲ含ムトEニ一致シテ了フカラ）．従ッテ x ヲ含マヌ。

<u>Lemma 4.</u> N ヲ maximal n. l. s. トスレバ E/N ハ實数体ト linear lattice-homomorphic

<u>証</u>. E $\longrightarrow$ E/N デ I $\longrightarrow$ I′ トスルト

$$E/N=\{\alpha I'\}_{-\infty<\alpha<\infty}.$$

若シ然ラズンバ E/N ハ Lemma 2 ニヨリ n. l. s. (≠0, E/N) ヲ含ムコトニナリ N ノ maximality ニ反スル。

以上カラ

<u>定理</u>. unit I ヲ有スル vector-lattice E ハ E ノ maximal n. l. s. N ≠ E ヲ点トスル空間 $\mathfrak{X}$ ノ上ノ有界函数 $x(t)$ ノ或ル系 $F(\mathfrak{X})$ ノ作ル vector-lattice ニ linear lattice-isomorphic ニ寫サレ且ツ I ハ恒等的ニ 1 ナル函数ニ寫サレル。

<u>系</u>. $\mathfrak{X}$ ノ点 t_0 ノ近傍ヲ

$$\mathop{\mathcal{E}}_{t}\{|x_i(t_0)-x_i(t)|<\varepsilon;\ i=1,2,\cdots\cdots,n\},\quad x_i\in F(\mathfrak{X}).$$

ナル weak (Tychonoff) topology デ定義スルト $\mathfrak{X}$ ハ bicompact 且ツ各 $x(t)\in F(\mathfrak{X})$ ハ $\mathfrak{X}$ デ連續ニナル。$\mathfrak{X}$ デノ連續函数ノ全体 $C(\mathfrak{X})$ ノ中デ $F(\mathfrak{X})$ ハ，norm $\|x\|=\sup|x(t)|$ ノ意味デ，稠密デアル。

<u>証明</u>ハ次ノ M. Krein ノ補助定理[1]カラ明デアラウ。

---

(1) C. R. URSS, 27 (1940), 427–430

<u>M. Krein ノ補助定理.</u> bicompact space $\mathfrak{R}$ ノ上ノ連續函數 $x(t)$ ノ作ル linear system $F(\mathfrak{R})$ が i) function space トシテ lattice ヲ作リ ii) 任意ノ $t_1, t_2 \in \mathfrak{R}$ ト任意ノ實數 α, β ニ對シテ $x(t_1)=\alpha_1$, $x(t_2)=\alpha_2$ ナル如キ $x(t) \in F(\mathfrak{R})$ が存在スルノヲ滿足スルナラバ $\mathfrak{R}$ デ連續ナ任意ノ函數ハ $F(\mathfrak{R})$ ニ屬スル函數デ一樣近似セシメ得ル。

Krein ノ補助定理ニハ $x(t) \in F(\mathfrak{R})$ ナラ $|x(t)| \in F(\mathfrak{R})$ トシテアルが之レハ i) ト同等. 又吾々ノ $F(\mathfrak{R})$ が ii) ヲ滿足スルコトハ $\mathfrak{R}$ ノ作リ方カラ明ラカ。尚コノ補助定理ノ證明が書イテナイノデ難シイノカト思ッタノデスが，中山深宮ノ兩氏ニオ話シタトコロ案外何デモナイコトがワカリマシタ。

兎ニ角斯樣ニシテ unit ヲ有スル vector lattice が表現出來テミルト角谷氏ヤ M. Krein ノ抽象M空間ヨリ幾分一般デアリ且ツ essential ニハ兩氏ノト違ハナイノダケレドモ，Stone ノ Boolean ring ノ表現ト全ク同ジ idea デ行ク所が興味ナクモナイト思ヒマス。