

914. 函数方程式 $g(x, y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x+y)} =$
就イテ

春木 博(阪大)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0),$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0) \quad \text{ノ間ノ}$$

有名ノ関係式トシテ $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ ガアル。次ニ
 $g(x, y), f(x)$ ヲトモニ未知函数トシテ、若干ノ解析
 的性質及ヒ境界条件ヲ附シテ函数方程式 $g(x, y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$
 ノ解ヲ求メテ見ヨリ。

(假定)

- (i) $g(x, y)$ ハ $x > 0, y > 0$ デ定義サレヌ一價有限實
 数値函数
- (ii) $g_{xx}(x, y), g_{yy}(x, y)$ ガ存在シテ連続デ
 アル。

$$(iii) \quad \varphi(x, 1) = \frac{1}{x}, \quad \varphi_{xx}(x, x) \geq \varphi_{yx}(x, x), \\ \varphi(x, x) \geq 0$$

(iv) $f(x)$ は $x > 0$ で、連続である。

(v) 函数方程式 (F) $\varphi(x, y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ が成立スル。

(結果) $\varphi(x, y) = B(x, y), \quad f(x) = e^{\alpha x} \Gamma(x)$
(α は實数)

(証明) 先づ $f(x) > 0$ となること (F) = 於て $y = x$ とおき、

(假定) (iii) の $\varphi(x, x) \geq 0$ を用ふるべし。 $f(x)$ が二回微分可能となることを証明スル。(F) を $y = \alpha$ に関して α より随分積分スルべし ($0 < \alpha < \beta$)

$$f(x) \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x+y) \varphi(x, y) dy$$

$f(x)$ は連続である故 $\varphi_y(x, y) = f(x+y)$ である $\varphi(x, y)$ 存在スル。故に上式、右辺 = 於て部分積分を行へば

$$f(x) \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \left[\varphi(x, y) \varphi(x, y) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x, y) \varphi_y(x, y) dy$$

$$f(x) > 0 \text{ である故 } \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = C \neq 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{C} \left\{ \left[\varphi(x, y) \varphi(x, y) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x, y) \varphi_y(x, y) dy \right\}$$

上式、右辺は連続微分可能である故 $f(x) \in$ 亦連続微分可能となる。 $f(x)$ が二回微分可能となること、(F) を x に関して

微分シタ式 = 於テ $f(x)$ が連続微分可能ナルコト及ビ假定

(ii) ヲ用キテ、同様ニシテ証明サレル。

$$f(x, y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x+y)} \quad \text{ヲ用ヒテ } f_{xx}(x, x) \geq f_{yy}(x, x)$$

x) ヲ書キ直セバ

$$\frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(2x)} \geq 0$$

$f(2x) > 0$ ナル故、

$$f''(x)f(x) - f'(x)^2 \geq 0$$

即チ $\log f(x)$ が凸函数デアイル。

今 $f^*(x) = e^{-\log f(1)x} f(x)$ ヲ考フレバ $f(x)$ が對數的
凸函数ナルコトカラ

(i) $f^*(x)$ ハ對數的凸函数デアイル。

又

(ii) $f^*(1) = 1$

假定 (iii) = 3))

(iii) $f^*(x+1) = xf^*(x)$

Artin / 定理 (Einführung in die theorie
der Gammafunktion 1931) = 3)) (i), (ii), (iii) カ
ラ

$$f^*(x) = \Gamma(x)$$

故ニ $\alpha = \log f(1)$ トオケバ

$$f(x) = e^{\alpha x} \Gamma(x)$$

$$f(x, y) = B(x, y)$$

(注意) 假定 (i), (ii), (iii) を充たす変数 / 函数 $f(x, y)$ として, $B(x, y)$ の外 = 色々トアルデアラウが、最も簡単トモ / トして對稱函数ナル條件ヲ入レテ $\frac{1}{xy}$ ヲアゲルコトが出来ル。上述ノ結果カラ例ヘバ $\frac{1}{xy} = \frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ を充たす連續函数 $f(x)$ ($x > 0$ デ連續) ハ存在シ得ヌコトガ判ル。