# 918. Vector-lattice ノ表現ニ就テ（續）

中野　秀五郎（東大）

此前ニ於ケル relative spectrum $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ノ definition 並ニソノ性質ヲ出スノニ Spectralization ヲ全然用ヒズニヤリマシタガ、若シ Spectralization ヲ用ヒマスト、コレハ非常ニ簡單トナリ、然モ解リヤスクナルノデ、此處デハ Spectralization ヲ用ヒテ論ジテ見ヨウ。

以下簡單ノタメ $a>0$ トスル。$a<0$ ノ場合ハ同様デスシ、一般ノ場合ハ $a=a_{+}-a_{-}$ トシ $[a]=[a_{+}]+[a_{-}]$ トワケテ考ヘレバヨイノデス。先ヅ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ヲ次ノ如ク定義シマス。

1°. 任意ノ $\varepsilon>0$（實數）ニ對シ

$$(\lambda_0-\varepsilon)[p]a \leqq [p]b \leqq (\lambda_0+\varepsilon)[p]a,$$

$$[p] \in \mathfrak{p}$$

ナル $[p]$ ガ常ニ存在スルトキハ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \lambda_0$$

2°. 任意ノλニ對シ

$$[p]b \geqq \lambda[p]a \qquad [p] \in \mathfrak{p}$$

ナル $[p]$ ガ常ニ存在スルトキハ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = +\infty$$

3°. 任意ノλニ對シ

$$[p]b \leqq \lambda[p]a \qquad [p] \in \mathfrak{p}$$

ナル $[p]$ ガ常ニ存在スルトキ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = -\infty$$

以上ニヨリ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ガ一意的ニ決定サレルコトハ次ノ事ヨリワカル。今

$$[a]b = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, da_\lambda$$

此處ニ $a_\lambda$ ハ $a$ ノ Zerlegung（私ノ學士院XVI. 1940）

即チ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} a_\lambda = a$, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} a_\lambda = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\mu-0} a_\lambda = a_\mu$, $\lambda > \mu$

ナラバ $|a_\lambda| \geqq |a_\mu|$, $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$[a_{-n\varepsilon}], [a_{-(n-1)\varepsilon} - a_{-n\varepsilon}], \cdots\cdots, [a_{n\varepsilon} - a_{(n-1)\varepsilon}],$$
$$[a - a_{n\varepsilon}]$$

ハ何レノ二ツモ互ニ orthogonal, 即チ Product ガ 0

ニシテ、然カモ和ハ$[a]$ニ等シイ。故ニ$\mathfrak{p}$ハ此等ノ唯一ツヲ含ム。$n$ノ如何ニ関セズ

$$[a-a_{n\varepsilon}]\in\mathfrak{p} \quad ナラバ \quad \left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=+\infty$$

$$[a_{-n\varepsilon}]\in\mathfrak{p} \quad ナラバ \quad \left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=-\infty$$

又 $[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]\in\mathfrak{p}$ ナラバ

$$[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]b=\int_{(n,-1)\varepsilon}^{n,\varepsilon}\lambda\, da_\lambda$$

故ニ

$$(n,-1)\varepsilon[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]a\leqq[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]b$$
$$\leqq n,\varepsilon[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]a$$

次ニ、$\varepsilon\to 0$ナラシムレバ Interval $((n,-1)\varepsilon, n,\varepsilon)$ハ互ニ中ニ入ルヲ以テ、遂ニ一点$\lambda_0$ニ収斂シ、$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\lambda_0$トナル。

1) $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ガ$\mathfrak{p}$ニ関シ連續ノ証明

任意ノ$\varepsilon$ニ對シ $[p]\in\mathfrak{p}_0$ニシテ

$$(\lambda_0-\varepsilon)[p]a\leqq[p]b\leqq(\lambda_0+\varepsilon)[p]a$$
$$\left(\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}_0\right)=\lambda_0 トス\right)$$

ナル$[p]$ガ存在スル。然ルトキハ$[p]\in\mathfrak{p}$ナルスベテノ$\mathfrak{p}$ニ對シ$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ノ定義ヨリ

$$\lambda_0-\varepsilon\leqq\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)\leqq\lambda_0+\varepsilon$$

故ニ$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ハ連續ナリ。又$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\pm\infty$ノ場合モ同様ナリ。

2) $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ハ $b$ ニ関シ modul ヲナスコトノ証明.

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \lambda_0, \quad \alpha > 0 \text{（實數）トス.}$$

任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ $[p] \in \mathfrak{p}$. 且ツ $(\lambda_0 - \varepsilon)[p]a \leqq [p]b \leqq (\lambda_0 + \varepsilon)[p]a$ ナル $[p]$ が存在ス. 故ニ

$$(\alpha\lambda_0 - \alpha\varepsilon)[p]a \leqq [p]\alpha b \leqq (\alpha\lambda_0 + \alpha\varepsilon)[p]a$$

従ッテ

$$\left(\frac{\alpha b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \alpha\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$$

他ノ場合モ同様ナリ.

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \lambda_1, \quad \left(\frac{c}{a}, \mathfrak{p}\right) = \lambda_2$$

トス. 然ルトキハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ

$$(\lambda_1 - \varepsilon)[p]a \leqq [p]b \leqq (\lambda_1 + \varepsilon)[p]a \qquad [p] \in \mathfrak{p}$$

$$(\lambda_2 - \varepsilon)[q]a \leqq [q]c \leqq (\lambda_2 + \varepsilon)[q]a \qquad [q] \in \mathfrak{p}$$

トル $[p], [q]$ が存在ス. 故ニ $[p][q] \in \mathfrak{p}$ ニシテ

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\varepsilon)[p][q]a \leqq [p][q](b + c) \leqq (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon)[p][q]a$$

従ッテ

$$\left(\frac{b+c}{a}, \mathfrak{p}\right) = \lambda_1 + \lambda_2$$

他ノ場合モ同様ナリ.

3) $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ハ $b$ ニ関シテ monoton ナルコトノ証明.

$b \geqq 0$ トス. 然ルトキハ $[a]b \geqq 0$ ニシテ

$$[a]\,b=\int_{0}^{\infty}\lambda\, d a_\lambda$$

故ニ $\mathfrak{p}$ ヲ 0 ナルヲ以テ $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)\geqq 0$

4) $[a]\in\mathfrak{p}$ ナル總ベテノ $\mathfrak{p}$ ニ對シ $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=0$ ナレバ $[a]\,b=0$ ノ證明。

$$[a]\,b=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, d a_\lambda$$

ニテ $[a-a_\mu]\neq 0$ $(\mu>0)$ ナラバ $[a-a_\mu]\in\mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{p}$ ニ對シ

$$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)>\mu$$

又 $[a_\lambda]\neq 0$ $(\lambda<0)$ ナラバ $[a_\lambda]\in\mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{p}$ ニ對シ

$$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)<\lambda$$

故ニ $[a]\,b=0$ ナリ。

5) $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\pm\infty$ ナル $\mathfrak{p}$ ハ $[a]$ 間ニテ *nirgendsdicht* ナリ。$\mathfrak{p}_0\ni[p]$ ニ對シ常ニ

$$\lim_{\lambda\to\infty}[a_\lambda-a_{-\lambda}][p]=[a][p]\in\mathfrak{p}_0$$

故ニ充分大ナル $\lambda$ ニ對シテ

$$[p]\geqq[a_\lambda-a_{-\lambda}][p]\neq 0$$

ニシテ $[a_\lambda-a_{-\lambda}][p]\in\mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{p}$ ニ對シテハ

$$-\lambda\leqq\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)\leqq\lambda$$

6) $\mathfrak{P}$ ニ於ケル *Integral*. $f(\mathfrak{p})$ ヲ $[a]$ 内ニ於ケ

ル finite contin function トスレバ $[a]$ ハ bicompact ナルニヨリ $f(\mathfrak{p})$ ハ banded 又 $f(\mathfrak{p})$ ハ contin ナルヲ以テ、任意ノ $\varepsilon>$ ニ對シ

$$[a]=[p_1]+\cdots\cdots+[p_n], \quad ([p_i][p_j] \neq 0)$$

ニシテ $f(\mathfrak{p})$ ノ $[p_i]$ ニ於ケル Schwankung ガ $\varepsilon$ ヨリ小ナラシメ得ル。$[p_i] \in \mathfrak{p}_i$ トスレバ

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\mathfrak{p}_i)[p_i]=\int_{[a]} f(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}=b$$

ヲ得ル。此ノ $b$ ニ對シ $f(\mathfrak{p})=\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ナルコトハ此ノ節證明セシ通リナリ。