919. $\wp$函数ニ関スル一ツノ函数方程式ニツイテ

春木　博（阪大）

$f(x)=\wp(x)$（Weierstrass ノ $\wp$－函数）トスルトキ次ノ函数方程式ガ成リ立ツ。

$$\text{(F)}\quad f(x+y)f(x-y)=\frac{\{f(x)f(y)+a\}^2+b\{f(x)+f(y)\}}{\{f(x)-f(y)\}^2}$$

$$\left(a=\frac{1}{4}g_2,\ b=g_3\right)$$

逆ニ今 $f(x)$ ヲ原点ノ近傍ニ於テ原点ヲ除キ一価正則ト假定シテ (F) ナル函数方程式ノ解ヲ求メテ見ヨウ。（a, b ハ常数

スル)

(F)カラ容易ニ $f(x)$ ハ原点ヲ極トシテ持ツコトガ判ルカラ、$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ トオケバ $g(x)$ ハ原点ノ或ル近傍デ正則デシカモ $g(0)=0$ ナルコトガ判ル。更ニ(F)ニヨリ $f(x)$ ハ偶函数ナル故 $g(x)$ モ亦偶函数トナリ $g'(0)=0$ デアル。

(F)ヲ $g(x)$ ニヨッテ書キ直セバ

$$\text{(G)}\quad g(x+y)\,g(x-y)\left[\{a g(x)g(y)+1\}^2 + b g(x)g(y)\{g(x)+g(y)\}\right]=\{g(x)-g(y)\}^2$$

(G)ヲ y デ二度微分シテ $y=0$ トオケバ($g(0)=0$, $g'(0)=0$, $g''(0)=\alpha$)

$$2g''(x)\,g(x)-2g'^2(x) + \alpha g(x)\left[2a g^2(x)+b g^3(x)+2\right]=0$$

$f(x)$ ニ関スル微分方程式ニ直セバ

$$f''(x)f(x)-f'^2(x)=\alpha\left[2f^3(x)+2af(x)+b\right]$$

之レヲ解クニ $f'(x)=p$ トオケバ $f''(x)=\dfrac{dp}{df}p$ ナル故

$$\frac{dp}{df}-\frac{p}{f}=\frac{\alpha}{p}\left(2f^2+2a+\frac{b}{f}\right)$$

之レハ Bernoulli ノ微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)\,y=q(x)\,y^n$ ニ於テ $n=-1$ ノ場合故ソノ解法ニ従ヘバ結局

$$f'^2(x)=\alpha\left[4f^3(x)+Kf^2(x)-4af(x)-b\right]\qquad (K\text{ハ常数})$$

之ヲ解イテ(F)ニ適スルモノヲ求ムレバ、結局

$$f(x)=\wp(\alpha x)\qquad (\alpha\text{ハ常数})$$