926. 無限次元空間ノ積分定理ニ就イテ

深宮　政範(阪大)

1.　Ωヲ數列 $X=(x_1, x_2, \cdots\cdots)$ 全体カラ成ル無限次元ノ空間トスル。但シ各々ノ x_i ハ $0 \leqq x_i \leqq 1$ ナル任意ノ數デアル。集合

$$I = \underset{X \in \Omega}{E}\left(a_i < x_{n_i} < b_i, \quad i=1,2,\cdots\cdots,n\right), \quad \text{但シ}$$

$$n_1 < n_2 < \cdots\cdots < n_k, \quad 0 \leqq a_i < b_i \leqq 1,$$

$$i=1,\cdots\cdots,k$$

ヲΩノ區間ヲ定義シ，區間Iノ測度ヲ

$$mI = \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i)$$

ト定義スレバ，Ωニ完全加法的デ，且ツ $m(\Omega)=1$ ナル測度(Carathéodory ノ意味ノ)が導入出来ル。

此際可測集合ノ全体測度0ノ集合ヲ除ケバ凡ユル區間ヲ含ム最小ノ Borel 体デアル。

測度 $m(A)$ ヲ用ヒテΩノ上ノ Lebesgue 積分ヲ普通ト全様ニ定義出来ル。$f(x)$ が可測デ，積分可能ナ

ラバ $f(x) \in L'(\Omega)$ ト表ス事ニスル。

2. B. Jessen ハ無限次元ノ空間ノ積分理論ノ論文[1]ノ中デ次ノ3定理ヲ証明シタ。何レモ積分理論デ基礎定理トナルモノデアル。

定理1. $\{D_n\}_{n=1,2,3,\cdots}$ ヲ Ω ノ nets トシ,

區間 $I_n \in D_n$ ガ $I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ 且ツ $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{I}_n = X_0$ トスル.

($I_n = I_n(X_0)$ ト表ハス)

$f(x) \in L'(\Omega)$ ナルトキ, 殆ンド凡ベテノ $X_0 \in \Omega$ ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(I_n(X_0))}\int_{I_n(X_0)} f(x)\,dX = f(X_0)$$

定理2. $f(x) \in L'(\Omega)$ ナル時

$$f_n(x) = \int_0^1 \cdots\int_0^1 f(X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots)\,dX_1 \cdots dX_n$$

(但シ $X = (X_1, X_2, \cdots)$)

トスレバ殆ンド凡テノ $X \in \Omega$ ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_{\Omega} f(x)\,dx$$

定理3. $f(x) \in L'(\Omega)$ トシ,

$$f_n(x) = \int_{\Omega_{n,\infty}} f(x)\,dX_{n,\infty}$$

$$= \int_0^1 \cdots f(x_1, x_2, \cdots)\,dX_{n+1}\,dx_{n+2}\cdots$$

1) B. Jessen, Acta Math., 63 (1934)

$$\left(=\lim_{p\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots, x_{n+p}, \cdots) dx_{n+1}\right.$$

$$\left.\cdots\cdots dx_{n+p}\right),$$

$$(X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots))$$

トスレバ，殆ンド凡テノ $X=(x_1, x_2, \cdots\cdots)$ ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(X)=f(X)$$

B. Jessen ノ以上ノ定理ノ証明法ハ，夫々別々デ，定理1ヲ等可測変換デ one-dimensional case ニ帰着サセ，定理2ハ下ノ補助定理2及ビ定理5カラ，定理3ハ定理1ヲ使ッテ証明スルノデアル。

然シ定理2ノ証明法ヲ改良スレバ，之レ等ノ定理ハ相互ニ関聯サセズニ，同ジ方針デ統一的ニ出來ルノデアル。

夫レハ例ヘバ定理2ニ於テ補助定理 ヲ証明シ，夫レニ依レバ有限次元ノ函數 $f(x)=f(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ ニ對シテ先ヅ直グニ分ルカラ，近似定理ヲ用フレバ凡テノ函數ニ對シテト云フ方針デ夫レガ又凡テノ場合ニ對シテ當テハマルノデアル。

吉田耕作氏ハ之レニツイテ早速大切ナ注意ヲシテ下サッタ。夫レハ下ニ基本定理4トシテ揭ゲタモノデアル、同ジコトデアルガ、ソノ方ガ分リ易イ。同氏ニ感謝シマス。

3.

補助定理1. $f(x)\in L^1(\Omega)$ トスル，$\{D_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$

ハ Ω ノ細分デ，nets ヲ作ルトスル。區間ノ列 $\{I_n\}_{n=1,2,\cdots}$
$\cdots$ が

$$I_n \in D_n, \quad I_n \supset I_{n+1}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \overline{I}_n = (x) = 一点$$

ナル如キモノトスル。 $A>0$ ニ對シテ

$$\underset{1\leqq n<\infty}{l.u.b.} \frac{1}{m(I_n(x_q))}\int_{I_n(x_q)} f(\xi)\,d\xi \geqq A$$

ナル点 $X \in \Omega$ ノ集合 E ノ測度ハ

$$m(E) \leqq \frac{1}{A}\int_E f(x)\,dx$$

補助定理2. $f(x) \in L'(\Omega_\infty)$

トスル。

$$f_n(x) = \int_0^1 \cdots\cdots \int_0^1 f(x_1,\cdots\cdots,x_n,\cdots\cdots)\,dx_1 \cdots\cdots dx_n,$$

$$(X = (x_1, \cdots\cdots, x_{n+1}, \cdots\cdots))$$

トスレバ $\underset{1\leqq n<\infty}{l.u.b.} f_n(x) \geqq A$ $(A>0)$ ナル点 X ノ集合 E

ノ測度ハ

$$\leqq \frac{1}{A}\int_E f(x)\,dX$$

補助定理3. $f(x) \in L'(\Omega)$ トスル。

$$f_n(x) = \int_{\Omega_{n,\infty}} f(x)\,dx_{n,\infty} \quad (X = (x_1,\cdots\cdots,x_n,\cdots\cdots))$$

トスレバ $\underset{1\leqq n<\infty}{l.u.b.} f_n(x) \geqq A$ $(A>0)$ ナル点 X ノ集合

Eノ測度ハ

$$\leqq \frac{1}{A}\int_E f(x)\,dx$$

証明ハ Jessen, loc. cit. ヲ参照サレタイ。

4. 基本定理 4. $L'(\Omega)$ デ定義サレタ operators $\{T_n\}\ n=1,2,\cdots\cdots$ ノ各 T_n ガ、$f\in L'(\Omega)$ ヲ可測函数 $f^{(n)}(x)=T_nf$ ニ寫シ、

i) additive homogeneous,

ii) $|f^{(n)}(x)|\leqq|f(x)|^{(n)}$

トスル。若シ

iii) $$E=\underset{X}{E}\left\{\underset{1\leqq n<\infty}{l.u.b.}\ f^{(n)}(x)\geqq A\right\},$$

$$mE\leqq\frac{1}{A}\int_E f(x)\,dx,\quad (A>0)$$

iv) $f_1(x)=f_1(x_1,\cdots\cdots,x_m)$ ニ對シテ、

$$\lim_{n\to\infty} f_1^{(n)}(x)=f_1^*(x)=T^*f_1(x),$$

(殆ンド凡テノ X ニ對シ)

ナラバ、

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=T^*f(x)\quad (\text{殆ンド凡テノ X ニ對シ})$$

証明ハ容易デス、$f(x)\in L'(\Omega)$ ハ有限次元ノ函數デ近似出来ルカラ

$$\int_\Omega |f(x)-f_1(x_1,\cdots,x_m)|\,dx\leqq\varepsilon^2,$$

$F(x) = f(x) - f_1(x_1, \cdots\cdots, x_m) =$ iii) ヲ apply シテ $mE \leqq \varepsilon$ ノ集合ヲ省ケバ

$$\underset{1 \leqq n < \infty}{l.u.b.} \left| f^{(n)}(x) - f_1^{(n)}(x_1, \cdots\cdots, x_m) \right| \leqq \varepsilon$$

従ツテ同ジ処デ

$$\left| \overline{\lim_{n \to \infty}} f^{(n)}(x) - f_1^*(x) \right| \leqq \varepsilon$$

ε ハ任意デアルカラ，殆ンド凡テノ X ニ對シテ

$$\overline{\lim} f^{(n)}(x) = \underline{\lim} f^{(n)}(x) = f^*(x)$$

系1. 定理1ハ補助定理1カラ出ル．$(f_1^*(x) = f_1(x))$

系2. 定理2ハ 〃 2カラ出ル．$(f_1^*(x) = \int f_1^*(x)dx)$

系3. 定理3ハ 〃 3カラ出ル．$(f_1^*(x) = f_1(x))$

5.

定理5. 可測集合 $S \subset \Omega$ ガ性質：有限箇ノ坐標ダケ異ル任意ノ2点 $x = (x_1, x_2, \cdots\cdots)$, $y = (y_1, y_2, \cdots\cdots)$ ハ同時ニ $\in S$ カ同時ニ $\bar{\in} S$ デアル、ヲ有テバ $m(S) = 0$ 又ハ1デアル。

証明. S ノ特性函數ヲ $f(x)$ トスル、S ハ明ラカニ $S = (\Omega_n - N_n, S_{n,\infty})$ デ表ハサレルカ，又ハ $S = (M_n, S_{n,\infty})$ ノ形デアル，但シ $m(N_n) = 0$, $m(M_n) = 0$ 且ツ n ハ任意ノ整數、従ツテ

$$f^{(n)}(x) = \int_0^1 \cdots\cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots\cdots) dx_1 \cdots\cdots dx_n$$

$$= 1 \ (x \in S), \ = 0 \ (x \bar{\in} S)$$

定理2カラ $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=\int_{\Omega} f(x)\,dx = m(S)$（殆ンド凡テノ $X\in\Omega$）．故ニ $m(S)=1$ 又ハ 0．

定理6．Eヲ可測集合，$\varphi_E(x)$ ヲソノ特性函数トスレバ

$$\varphi_E^{n}(x)=\int_{\Omega_{n,\infty}} \varphi_E(X_1,\cdots\cdots)\,dX_{n,\infty}$$

ハ殆ンド凡テノXデ收斂シ，殆ンド凡テノ点デ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_E^{n}(x)=\varphi_E(x)$$

証明．定理3カラ．