927. 淡中氏ノ双對定理ニ就イテ
(M. Krein ノ方法紹介)

大塚位相數學談話會

最近ノ C. R. URSS, Vol. 31, No. 1, (1941) デ M. Krein ハ淡中氏ノ非可換群ノ双對定理ノ別証明ヲ與ヘタ。証明自体ハ寧ロ淡中氏ノヨリモ複雑デアルが, Gelfand ノ normed ring ノ應用ト見レバ極メテ面白イ方法デアル様ニ思ハレルノデ, 以下ニ出来ル丈ケ可寧ニ紹介シタイト思ヒマス。

其ノ方法ハ一ツノ大キナ normed ring R ノ中ニ三ツノ normed ring R_1, R_2, R_3 ヲ embed シテ, R_3 ノ構造 (特ニ maximal ideal ノ性質) ヲ既知ノ R_1, R_2 ノ性質カラ導クトイフノデアル。Krein ハ途中デ positive functional ニ関スル定理ヲ用ヒテ来ルが (定理 3), コレハ寧ロ双對定理ノ應用ト考ヘタ方がヨイト思ハレル。(§7 参照) 又一般ニ十分ニ澤山ノ almost periodic function ヲ持ツ group ハ結局 bicompact group ノ場合ニ帰着サレルカラ (§6), 初メカラ bicompact group ノ場合ニ限ッテ考ヘルコトニスル。

引用文献ハ

(1) T. Tannaka, Über den Dualitätssatz in nichtkommutativen topologischen Gruppen, 東北, 45 巻 (1938), (本誌, 149, 151 号)

(ii) I. Gelfand, Normierte Ringe, Rec. Math., T. 9, No. 1 (1941)

§1

Gヲ bicompact topological group トスル。積空間G×Gノ上デ次ノ如キ複素數値函數 $\Phi(x, y)$ ノ全体ノ集リPヲ考ヘル。

(1) $\Phi(x, y)$ ハ G×G 上デ連續,

(2) $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$,

(3) Φ ハ positive definite：任意ノ scalar ξ_1, -----, ξ_n ニ對シテ

$$\sum_{i,j} \Phi(x_i, x_j)\, \xi_i \overline{\xi_j} \geqq 0$$

先ヅ $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ ガ P ニ屬スレバ, $\alpha\Phi_1(x, y)$ (α：實正數), $\Phi_1(x, y)+\Phi_2(x, y)$, $\Phi_1(x, y)\times\Phi_2(x, y)$ モ亦Pニ屬スル。

初メノ二ツノ場合ハ明カ。積ノ場合ハ $\Phi_2(x_i, x_j)\xi_i\overline{\xi_j} = a_{ij}$ トオケバ, $A=(a_{ij})$ ハ positive definite Hermitian matrix ナル故, $A = UDU^{-1}$ トアラハサレル。此処ニUハ unitary matrix, $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$, $\alpha_i \geqq 0$ トスル。故ニ $(s_{ij}) = U\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}$ トオケバ, $A = S\cdot\overline{S}'$ トナル。即チ $\sum_{ij}\Phi_1(x_i\, x_j)\Phi_2(x_i, x_j)\xi_i\overline{\xi_j}$

$$= \sum_k \sum_{ij} \Phi_1(x_i x_j)\, s_{ik}\, s_{jk} \geqq 0.$$

次ニ $\Phi(x, y)$ ノ norm ヲ (4) デ定メル。

$$(4)\qquad \|\Phi(x, y)\| = \underset{x}{Max}\,|\Phi(x, x)|$$

(3) ノ條件デ特ニ $n = 1, 2$ ノ場合ニハ

$$(5)\qquad \begin{cases} \Phi(x, x) \geqq 0 \\ |\Phi(x, y)| \leqq \sqrt{\Phi(x, x), \Phi(y, y)} \leqq \|\Phi\|. \end{cases}$$

<u>定理1.</u> 『R ヲ $\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y)$ (Φ_1, $\Phi_2 \in P$) ノ全体トシ

$$\|\Phi\| = \underline{\inf}(\|\Phi_1\| + \|\Phi_2\|)$$

(コヽニ inf ハ Φ ノカヽルスベテノ分解ニツイテ考ヘル)

トスレバ，R ハ實係數ノ normed ring トナル。』

(証) R ガ実係數ヲ許ス Ring ヲ作ルコトハ明カデアル。

$$(6)\qquad \|\Phi_1 + \Phi_2\| \leqq \|\Phi_1\| + \|\Phi_2\|, \quad \|\alpha\Phi_1\| = |\alpha|\,\|\Phi\|,$$

$$\|\Phi_1 \cdot \Phi_2\| \leqq \|\Phi_1\| \cdot \|\Phi_2\|$$

中，例ヘバ最後ノ関係ヲ驗シテミル。Φ_1, $\Phi_2 \in P$ ノトキハ大丈夫デアル，故ニ

$$\Phi_1 = \Phi_1' - \Phi_1'', \quad \Phi_2 = \Phi_2' - \Phi_2'' \ (\Phi_1' \cdots\cdots \Phi_2'' \in P)$$

ト分解シテ

$$\|\Phi_1\| + \varepsilon \geqq \|\Phi_1'\| + \|\Phi_1''\|,$$

$$\|\Phi_2\| + \varepsilon \geqq \|\Phi_2'\| + \|\Phi_2''\|$$

トスレバ，

$$\Phi_1 \cdot \Phi_2 = (\Phi_1'\Phi_2' + \Phi_1'' + \Phi_2'') - (\Phi_1'\Phi_2'' + \Phi_1''\Phi_2')$$

ヨリ

$$\|\Phi_1 \cdot \Phi_2\| \leqq \|\Phi_1'\Phi_2' + \Phi_1''\Phi_2''\| + \|\Phi_1'\Phi_2'' + \Phi_1''\Phi_2'\|$$

$$\leqq (\|\Phi_1'\| + \|\Phi_1''\|)(\|\Phi_2'\| + \|\Phi_2''\|)$$

$$\leqq (\|\Phi_1\| + \varepsilon)(\|\Phi_2\| + \varepsilon)$$

コンデ ε ハ任意デアルカラ，(6) ガ成立ツ。

次ニ R ガコノ norm デ complete ナルコトハ $\{\Phi_n\}$ ガ $\lim_{m,n \to \infty} \|\Phi_m - \Phi_n\| = 0$ ヲ満足スルモノトスル。部分列 $\{r_n\}$ ヲトッテ $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Phi_{r_n} - \Phi_{r_{n+1}}\| < +\infty$ ニスル。

$$\Phi_{n_r} - \Phi_{n_{r+1}} = F_n - F_n' \quad (F_n, F_n' \in P)$$

トシテ，

$$\|\Phi_{n_r} - \Phi_{n_{r+1}}\| + \frac{1}{2^n} \geqq \|F_n\| + \|F_n'\|$$

トスル。コノ時又 $\sum_1^{\infty} \|F_n\| < +\infty$, $\sum_1^{\infty} \|F_n'\| < +\infty$ トナル。

(5) カラ $\sum_1^{\infty} F_n(x, y)$, 及ビ $\sum_1^{\infty} F'(x, y)$ ハ $G \times G$ 上デ一様ニ収斂スルカラ，其ノ極限 $F, F' \in P$ トナル。

$\Phi(x, y) = F(x, y) - F'(x, y)$ ガモトムル limit ニナル。——

又 R 中デモ

$$(5') \qquad |\Phi(x, y)| \leqq \|\Phi\|$$

ノ成立スルコトモスグニワカル。

§ 2

M. Krein ノ *Lemma.* 「実係数ノ normed ring

ハ必ズ複素係数ノ normed ring ニ擴大出来ル』

(証) R ヲ實係数ノ normed ring トシ，$F=f+ig$ ($f, g \in R$) ノ全体ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ，$\mathfrak{R}$ ハ明カニ複素係数ノ ring ヲ作ル。此ノトキ $f=F^+$, $g=F^-$ ト書クコトニスル。

(ア) $\|F\| = \max_\theta \|f\cos\theta - g\sin\theta\|$

$$= \max_\theta \|(e^{i\theta}F)^+\|$$

トキメレバ，$\|F+G\| \leqq \|F+G\|$，$\|\alpha F\| = |\alpha|\|F\|$ (α: complex number) トナレコトハスグニワカル。次ニコノ norm ニ関シテ積モ亦連續デアルタメニハ，例ヘバ

$$\|FG\| \leqq 2\|F\|\|G\|$$

ヲ証明スレバヨイ。$\|FG\| = \|(e^{i\theta}FG)^+\|$ トスレバ，$F_1 = e^{i\theta}F$ トオイテ

$$\|FG\| = \|(F_1G)^+\| = \|F_1^+G^+ - F_1^-G^-\|$$

$$\leqq \|F_1^+\|\|G^+\| + \|F^-\|\|G^-\|$$

$$\leqq 2\|F_1\|\|G\| = 2\|F\|\|G\| \text{ --- }$$

最後ニ $\mathfrak{R}$ ノ complete ナルコトハ，夫々＋，－成分ニツイテ考ヘレバ R ノ場合ニ帰着出来ルカラ，Gelfand, Satz 1 ニヨリ $\mathfrak{R}$ ハ normed ring トナル，q.e.d.

故ニ §1 デ考ヘタ R ヲ，コノ Lemma ニヨリ $\mathfrak{R}$ マデ拡大スル。§3, 4 デ $\mathfrak{R}$ ノ normed subring $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ ヲ考ヘル。

§ 3

$\mathfrak{R}_0$ ヲ G ノ上ノ complex valued continuous function 全体ニ uniform topology ヲ入レテ生ズル normed ring トスル。

(イ) $\mathfrak{R}_0 \ni f(x)$ カラ, $F(x,y) = f(x)$ ト置ケバ, $F(x,y) \in \mathfrak{R}$ トナル。

(証) $F(x,y)^+ = \frac{1}{2}\left(F(x,y) + \overline{F(y,x)}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \overline{f(y)}\right)$

$$= \frac{1}{4\mu}\left\{(\mu + f(x))(\mu + \overline{f(y)}) - (\mu - f(x))(\mu - \overline{f(y)})\right\}$$

$$(\mu > 0)$$

同様ニ $F(x,y)^- = \frac{1}{2}\left(F(x,y) - \overline{F(y,x)}\right)$

$$= \frac{1}{4\mu}\left\{(f(x) + i\mu)(\overline{f(y)} - i\mu)\right.$$

$$\left. - (f(x) - i\mu)(\overline{f(y)} + i\mu)\right\}$$

ハ共ニ R ニ属スルカラ, 従ッテ $F(x,y) = F(x,y)^+ + iF(x,y)^- \in \mathfrak{R}$ —

故ニ $F(x,y)$ ノ全体 $\mathfrak{R}_1 (\cong \mathfrak{R}_0)$ ハ $\mathfrak{R}$ = embed サレタ。次ニ norm ニツイテ

(ロ) $\frac{1}{2}\underset{x}{Max}|f(x)| \leqq \|F(x,y)\| \leqq 4\underset{x}{Max}|f(x)|$

(証) 定義ヨリ $\|F\| \leqq \|F^+\| + \|F^-\|$

$$\leqq \frac{1}{4\mu}\left\{\underset{x}{Max}|\mu + f(x)|^2 + Max|\mu - f(x)|^2\right.$$

$$\left. + Max|f(x) + i\mu|^2 + Max|f(x) - i\mu|^2\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{\mu}\left\{\mu + Max|f(x)|\right\}^2$$

此処デ $\mu = Max|f(x)|$ トオケバ

$$\|F\| \leqq 4\,Max|f(x)|^2$$

遂ニ $|f(x)| = |F(x,y)^{+} + iF(x,y)^{-}| \leqq |F(x,y)^{+}| + |F(x,y)^{-}|$

$\leqq \|F^{+}\| + \|F^{-}\| \leqq 2\|F\|$ （コヽニ(5')式ヲ用ヒタ）

故ニ(ロ)ガ成立スル。

定理2. 『$\mathfrak{R}_0 \ni f(x) \longleftrightarrow F(x,y)\ (=f(x))$ ニヨッテ生ジ $\mathfrak{R}$ ノ normed subring $\mathfrak{R}_1$ ハ normed ring トシテ $\mathfrak{R}_0$ ト isomorph ニシテ homeomorphic デアル。

$F(x,y) = f(y) \in \mathfrak{R}_0$ トル $F(x,y)$ ノ全体ノ作ル $\mathfrak{R}_2$ ニ關シテモ同様デアル』

次ニ $\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ トノ關係

定理3. 『$\mathfrak{R}_1 \frown \mathfrak{R}_2$ ハ e ノ scalar 倍ヨリナル。又 $\mathfrak{R}$ 中 $\mathfrak{R}_1$ ト $\mathfrak{R}_2$ トヲ含ム最小ノ normed ring ハ $\mathfrak{R}$ 自身デアル。』

（証）前半ハ明カ。後半ハ，P ガ $\mathfrak{R}_1$ ト $\mathfrak{R}_2$ トノ作ル $\mathfrak{R}$ ノ subring ノ limit トシテ表ハサレルコトヲ示セバヨイ。G ノ invariant integral ヲ $\int dx$ デ示セバ，$\Phi(x,y) \in P$ ニ對シテ，

$$\varphi(x) = \lambda \int \Phi(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

ノ Eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ ハスベテ positive デ，Mercer ノ定理（例ヘバ Courant, Hilbert (C. H.) Mathematische Physik, Bd. 1, p. 117, 參照）カラ，λ_n ニ對スル Eigenfunction ヲ $\varphi_n(x)$ トスレバ

$$(8)\quad \Phi(x,y)=\sum_{k}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}$$

ト一様且ツ絶對ニ收斂スル。此ノ時 $\varphi_k(x)\in\mathfrak{R}_1$, $\overline{\varphi_k(y)}\in\mathfrak{R}_2$ デ，且ツ

$$\Phi_n(x,y)=\Phi(x,y)-\sum_{1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}$$

ハ又 (1), (2), (3) ヲ滿足シ，P ニ屬スル故，(4) ニヨッテ

$$\|\Phi_n(x,y)\|=\underset{x}{Max}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

ソトナル。 q. e. d.

§ 4

コヽニ今一ツノ $\mathfrak{R}$ ノ normed subring $\mathfrak{R}_3$ ヲ考ヘル。

$f(x)$ ヲ G 上ノ complex valued continuous function トシテ，

$$(9)\quad f(x)=\overline{f(x^{-1})}$$

$$(10)\quad \sum_{i,j=1}^{n} f(x\,y^{-1})\xi_i\overline{\xi}_j\geqq 0$$

ヲ滿足スル $f(x)$ ノ全体ヲ考ヘル。コレヲ P_G ト書クコトニスル。

bicompact group G ノ互ヒニ equivalent デナイ完全既約 unitary 表現系ヲ $\{u_{ij}^{(\alpha)}(x)\}$ トスル。又ソノ matrix ノ次數ヲ r_α トスル。

$$a_{ij}^{(\alpha)}=(f(x),u_{ji}^{(\alpha)}(x))=\int f(x)\,\overline{u_{ji}^{(\alpha)}(x)}\,dx$$

トオケバ，(9)カラ $A^{(\alpha)}=(a_{ij}^{(\alpha)})$ ハ r_α 次ノ Hermitian Matrix トナル。

$$A^{(\alpha)}=U_\alpha^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)}\end{pmatrix}U_\alpha,\quad \lambda_1^{(\alpha)},\cdots\cdots,\lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)}\geqq 0$$

ト unitary matrix ヲ用ヒテ diagonal form ニナホシテ

$$U_\alpha U^{(\alpha)}(x)\,U_\alpha^{-1}=V^{(\alpha)}(x)=(v_{ij}^{(\alpha)}(x))$$

ヲ作レバ，$f(x)$ ノ Fourier 式展開ハ次ノ如クニ與ヘラレル。

$$(11)\quad f(x)\sim\sum_\alpha\sum_{ij}a_{ji}^{(\alpha)}u_{ij}^{(\alpha)}(x)=\sum_\alpha Sp\,(A^{(\alpha)}U^{(\alpha)}(x))$$

$$=\sum_\alpha Sp\left(U_\alpha^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)}\end{pmatrix}U_\alpha U^{(\alpha)}(x)\right)$$

$$=\sum_\alpha Sp\left(\begin{pmatrix}\lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)}\end{pmatrix}V^{(\alpha)}(x)\right)=\sum_\alpha\sum_i\lambda_i^{(\alpha)}v_{ii}^{(\alpha)}(x)$$

一方 $v_{ii}^{(\alpha)}(xy^{-1})=\sum_{k=1}^{r_\alpha}v_{ik}^{(\alpha)}(x)\,\overline{v_{ik}^{(\alpha)}(y)}$ ナル故 (11) ヨリ

$$(f(x,y^{-1}),\ \overline{\sqrt{r_\alpha}\,v_{il}^{(\alpha)}(y)})$$

$$=\sum_\alpha\sum_j\lambda_j^{(\alpha)}\sum_k v_{jk}^{(\alpha)}(x)\left(\overline{v_{jk}^{(\alpha)}(y),\ \sqrt{r_\alpha}\,v_{il}^{(\alpha)}(y)}\right).$$

$$=\frac{\lambda_i^{(\alpha)}}{r_\alpha}\cdot\sqrt{r_\alpha}\,v_{il}^{(\alpha)}(x),$$

即チ $\sqrt{r_\alpha}\,v_{ij}^{(\alpha)}(x)$ $(j=1,\cdots\cdots,r_\alpha)$ ハ

(12) $\varphi(x) = \lambda \int f(xy^{-1}) \varphi(x)\, dx$

ナル積分方程式ノ Eigenvalue $\dfrac{r_\alpha}{\lambda_i^{(\alpha)}}$ ニ對スル Eigenfunction ヲ作リ, α, i ヲスベテ動カセバ (12) 式ノ Eigenfunction ノ complete system ヲ作ル。

再ビ Mercer ノ定理カラ

$$f(xy^{-1}) = \sum_\alpha \sum_{ik} \frac{\lambda_i^{(\alpha)}}{r_\alpha} \cdot \sqrt{r_\alpha}\, v_{ik}^{(\alpha)}(x) \cdot \overline{\sqrt{r_\alpha}\, v_{ik}^{(\alpha)}(y)}$$

$$(\lambda_i^{(\alpha)} \geqq 0)$$

$$= \sum_\alpha \sum_{ik} \lambda_i^{(\alpha)} v_{ik}^{(\alpha)}(x) \overline{v_{ik}^{(\alpha)}(y)}$$

ハ $G \times G$ デ一樣且ツ絶對ニ收斂シ, 特ニ $y = e$ トオケバ

(13) $f(x) = \sum_\alpha \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x)$

ハ G デ一樣且ツ絶對ニ收斂スル。故ニ

(14) $F(x, y) = f(xy^{-1})$

トシテ P_G ヲ $\mathfrak{R}$ ノ一部ト考ヘレバ, $P_G \subset P$ ナル故

(15) $\|F(x,y)\| = \max_x |f(x \cdot x^{-1})| = f(e) = \sum_{\alpha \cdot i} \lambda_i^{(\alpha)}$

トナル。一方 (15) ハ (12) ノスベテノ Eigenvalue ノ逆數ノ和トモナッテ居ル。

(15') $\|F\| = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} = \sum_{\alpha, i} r_\alpha \cdot \left(\dfrac{r_\alpha}{\lambda_i^{(\alpha)}}\right)^{-1}$

サテ §1 ト同樣ニ, P_G カラ R_G ヲ $f_1, f_2 (\in P_G)$ ノ差トシテアラハサレル全体トスレバ実係數ノ normed ring ヲ作リ, (14) ノ對應デ $R_G \cong R_3 \subset R \subset \mathfrak{R}$ トナル。

$R_G \ni f(x)$ カラ作ッタ(12)ナル積分方程式ヲ考ヘレバ，(11)ノ展開式ハ（$\lambda_i^{(\alpha)} \geqq 0$ トイフコトダケヲ除イテ）ソノママ成立スル。此ノ時 $F(x,y) = f(xy^{-1})$ ＝對シテ

$$(16) \quad \| F(x,y) \| = \sum_{\alpha, i} | \lambda_i^{(\alpha)} |$$

ヲ証明スル。

$$R_G \ni f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad (f_1, f_2 \in P_G),$$

$$\text{即} \quad f(xy^{-1}) = f_1(xy^{-1}) - f_2(2y^{-1})$$

カラ，三ツノ *hermitian kernel* $f(xy^{-1})$, $f_1(xy^{-1})$, $f_2(xy^{-1})$ ＝對シテ C.H. Bd. I P. 113 ノ定理*ヲ適用スル，先ヅ

$f_i(xy^{-1})(i=1,2)$ ＝對スル(12)式ノ *Eigenvalue* ヲ $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \cdots\cdots, (\lambda_j^{(i)} > 0)$; $\sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(i)}} = f_i(e)$，$f(xy^{-1})$ ノ(12)式ノ正及ビ負ノ *Eigenvalue* ヲ夫々 $\lambda_1^{\pm}, \lambda_2^{\pm}, \cdots\cdots$，トスレバ(15′)同様＝

$$(17) \quad \begin{cases} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{+}} = \sum_{\alpha, i}{}' \lambda_i^{(\alpha)} & (\text{コヽ＝}\textstyle\sum' \text{ハ } \lambda_i^{(\alpha)} > 0 \text{ ＝ツイテノ和}) \\ \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{-}} = \sum_{\alpha, i}{}'' \lambda_i^{(\alpha)} & (\text{コヽ＝}\textstyle\sum'' \text{ハ } \lambda_i^{(\alpha)} < 0 \text{ ＝ツイテノ和}) \end{cases}$$

トナル。此処デ C.H ノ定理*カラ

$$(18) \quad \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} \geqq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{+}}; \quad -\sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} \leqq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{-}}$$

トナル。故＝(17)ト共＝

$$(19) \quad \sum_{i,\alpha} | \lambda_i^{(\alpha)} | \leqq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} + \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} = f_1(e) + f_2(e)$$

$$=\|f_1\|+\|f_2\|$$

トナル一方

$$(20)\quad \begin{cases} f_1^0(x)=\sum_{\alpha,i}{}' \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x) \\ -f_2^0(x)=\sum_{\alpha,i}{}'' \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x) \end{cases}$$

ト置ケバ，(19) 式ヨリ絶對且ツ一様ニ收斂スル。故ニ $f_1^{(0)}, f_2^{(0)} \in P_G$ トナリ，$f=f_1^{(0)}-f_2^{(0)}$ デアレカラ

$$(21)\quad \|f_1^0\|+\|f_2^0\|=f_1^0(e)+f_2^0(e)=\sum_{\alpha,i}|\lambda_i^{(\alpha)}|$$

トナル。(19) ト (21) トカラ R_G ニオケル $\|f\|$ ノ定義ニヨリ (16) ノ成立スルコトガワカル。

サテ $R_G \cong R_3$ ヲ M. Krein ノ Lemma デ complex coef ノ normed ring ニ擴大シタモノヲ $\mathcal{R}_3 \subset \mathcal{R}$ トスル。

§ 5

此処デ $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}, \mathcal{R}_3$ ノスベテノ maximal ideal ヲ決定スル。先ヅ

Lemma 2 (Stone). $\mathcal{R}_0$ ヲ bicompact ナ G上ノスベテノ複素数値連續函数ノ全体ノ作ル normed ring トスル。(§3). $\mathcal{R}_0$ ノ任意ノ maximal ideal $\mathfrak{I}_0$ ハ G上ノ一定点 x_0 デ 0 ナル値ヲトル $\mathcal{R}_0$ ノ元全体トナル。

(証) $\mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathcal{R}_0/\mathfrak{I}_0$ ナル homomorphic continuous ナ對應ヲ F_0 トスル。先ヅ $f(x) \in \mathcal{R}_0$ ガ實函数ナルトキハ $F_0(f)$ モ亦實數トナルコトハ Gelfand, Satz 15 ヨリワカル。今 G ノ各点 x_1 ニ對シテ $f(x) \neq 0$

ナル$\mathfrak{J}_0$ニ屬スル實函數ガアルトスレバ，ソノ一ツヲトリf_{x_1}トスル。即チ$f_{x_1}(x_1) \neq 0$.

$U_{x_1} = E_x(f_{x_1}(x)^2 > 0)$トスレバ，$G$ノbicompactナルコトカラ，カヽル有限個ハ$G$全体ヲオホフ。コノ有限個ニツイテノ和$\sum f_{x_1}(x)^2 = f_0(x) \in \mathfrak{J}_0$ハ$G$上至ル所$0$ニナラヌカラ，$f_0^{-1}(x) \in \mathfrak{R}_0$トナル。コレハ矛盾ヲ生ズル。故ニ$\mathfrak{J}_0$ニ屬スル實函數ハスベテ一点$x_0$デ$0$トナル。

故ニ實函數fニ對シテハ$F(f) = f(x_0)$トナル。一般ニ$F(f_1(x) + i f_2(x)) = F(f_1) + iF(f_2) = f_1(x_0) + i f_2(x_0)$トナルカラ，Lemmaハ證明セラレタ。

<u>定理4</u>　『§2ノnormed ring $\mathfrak{R}$ニテ，任意ノmaximal ideal $\mathfrak{J}$ニ對シテ$G \ni x_0, y_0$ガ定マリ，$\mathfrak{J}$ハ$\Phi(x_0, y_0) = 0$ナルΦノ全体トナル。』

（證）$\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}/\mathfrak{J}$ナル$\mathfrak{R}$ノcontinuous functionalヲ$F(\Phi)$トスル。

$\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J} \frown \mathfrak{R}_i \ (i = 1, 2)$トスレバ，$\mathfrak{R}_i \rightarrow \mathfrak{R}_i/\mathfrak{J}_i$ナルcontinuous functionalハ夫々$F(\Phi_i)$ $(\Phi_i \in \mathfrak{R}_i)$ニ等シイ。Lemma 2ヨリ$x_0, y_0$ガ定マッテ，

$$F(\Phi_1(x, y)) = \Phi_1(x_0, y) = \Phi_1(x_0, y_0);$$

$$F(\Phi_2(x, y)) = \Phi_2(x, y_0) = \Phi_2(x_0, y_0)$$

トナル。FハmultiplicativeContinuous functionalデアルカラ(Gelfand, Satz 7)定理3ニヨリFハ$F(\mathfrak{R}_1)$，$F(\mathfrak{R}_2)$ノ延長トシテ一義ニ定マル。即

$$F(\Phi) = \Phi(x_0, y_0)$$

ガ成立スル。 q.e.d.

次ノ定理5ハ後ニ見ルヤウニ双對定理（定理7）トノ等值ナモノデアル。

<u>定理5</u>　『$\mathfrak{R}_3$ ノ任意ノ Maximal ideal $\mathfrak{J}_3$ ハアル $G \ni x_1$ デ 0 トナル $f(x) \in \mathfrak{R}_3$ ノ全体デアル』

（証）$\mathfrak{J}_3$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ中ノ maximal ideal $\mathfrak{J}$ ニマデ拡大スル（Gelfand, Satz 5）即チ $\mathfrak{J} \frown \mathfrak{J}_3 = \mathfrak{J}_3$. 即 $\mathfrak{R}_3 \to \mathfrak{R}_3/\mathfrak{J}_3$ ナル Functional F_3 ハ $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/\mathfrak{J}$ ナル $\mathfrak{R}$ 全体デ定義サレタ Functional F ニマデ拡大サレタ譯デアル。従ッテ定理4カラ

$F(\Phi(x,y)) = \Phi(x_0, y_0)$ トナリ，特ニ $\Phi(x,y) = f(xy^{-1}) \in \mathfrak{R}_3$ ニ對シテハ

$$F(\Phi(x,y)) = f(x_0 y_0^{-1}) = f(x_1) \quad (x_1 = x_0 y_0^{-1})$$

トナル. q.e.d.

注意. $\mathfrak{R}$ ニ含マレル $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ ニ對シテ，夫々ノ maximal ideal ノ作ル bicompact space ヲ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_i\ (i = 1, 2, 3)$ トスレバ，今ノ場合 $\mathfrak{M}_i$ ハ $\mathfrak{M}$ カラ "Zerlegungsraum" トシテ作ラレ，$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ トナッタ。一般ニ

『$\mathfrak{R}_1$ ヲ normed ring $\mathfrak{R}$ ノ normed subring トスル。（勿論 $\mathfrak{R}_1$ ノ norm ハ $\mathfrak{R}$ ノ norm ヨリ定メル）夫々ノ maximal ideal ノ作ル bicompact space ヲ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ トスレバ、$\mathfrak{M} \ni \mathfrak{J} \to \mathfrak{J} \frown \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{J}_1 \in \mathfrak{M}_1$ ナル對應デ，$\mathfrak{M}_1$ ハ $\mathfrak{M}$ ノ Zerlegungsraum トナル』

『$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ガ normed ring $\mathcal{R}$ ノ normed subring デ, $\mathcal{R}_1 \frown \mathcal{R}_2$ ハ e ノ scalar 倍ノミヨリナリ, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ヲ含ム最小ノ $\mathcal{R}$ ノ normed subring ガ $\mathcal{R}$ 自身ナルトキハ $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ ト直積空間トシテ表ハサレル。』

イヅレモ証明ハ定義カラ直チニワカル。——

§6

淡中氏ノ bicompact group G ニ於ケル双對定理ハ次ノ形デ言ヒ表ハサレル。(T. Tannaka, Hilfssatz 4)

<u>定理 6</u> (淡中) 『G ノ完全既約 unitary 表現系 $\{ u_{ij}^{(\alpha)}(x) \}$ カラ, ソノ成分 $u_{ij}^{(\alpha)}(x)$ ノ linear combination ノ作ル ring Γ_G ニテ, ソノ上ノ linear functional F:

$$F_G \ni f \longrightarrow F(f)$$

ガ

$$(22) \quad \begin{cases} F(fg) = F(f) \cdot F(g) \\ F(\bar{f}) = \overline{F(f)} \end{cases}$$

ヲ満足スルナラバ, 實ハアル $x_0 \in G$ ガ存在シテ $F(f) = f(x_0)$ トナル。』

(証) (22) 式ヨリ $F(f\bar{f}) \geq 0$ デアル。故ニ

$$F(1) = F\left(\sum_{k=1}^{n} |u_{jk}(x)|^2\right) = \sum_{1}^{n} F(|u_{jk}(x)|^2)$$

ヨリ

$$(23)\quad F(1) \geqq F(|u_{jk}(x)|^2) \geqq 0$$

トナル。次ニ (22) ヨリ

$$0 \leqq F(|\lambda + u_{jk}(x)|^2)$$
$$= |\lambda|^2 F(1) + 2\Re\{\lambda F(u_{jk})\} + F(|u_{jk}|^2)$$

カラ例ノ論法デ (23) ヲ用ヒテ

$$|F(u_{jk})|^2 \leqq F(1)\, F(|u_{jk}|^2) \leqq F(1)^2$$

即チ

$$(24)\quad |F(u_{jk})| \leqq F(1)$$

トナル。(24) ヲ用ヒテ Γ_G 上デ def. サレタ F ヲ §4デ考ヘタ $\Re_3$ ニマデ拡張スル。ソレニハ $\Re_3 \ni f(x)$ トスレバ (20) カラ

$$f(x) = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} u_{ii}^{(\alpha)}(x)$$

ト絶対且一様収斂級数ニ展開サレ，特ニ $\sum_{i,\alpha} |\lambda_i^{(\alpha)}| < \infty$ デアル。故ニ

$$F(f) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\alpha, i}^{n} \lambda_i^{(\alpha)} F(v_{ii}^{(\alpha)}(x)) \right)$$

トスレバ，(24) 式ヨリ確カニ limit ハ存在シテ，其ノ時

$$F(f+g) = F(f) + F(g),\ F(\alpha f) = \alpha F(f)\ (\alpha: 実数),$$
$$F(fg) = F(f) \cdot F(g)$$

ハ確カニ保タレルコトガワカル。然ルトキハ定理5カラ $F(f) = f(x_0)$ ナル $x_0 \in G$ ガ存在スル。即チ定理ハ証

明サレタ。

§7

G ガ bicompact デナイ時ハ，良ク知ラレテヰル様ニ G ヲ拡大スレバヨイ。今 G ヲ十分ニ澤山ノ almost periodic function ヲモツトスル。コノ全体ヲ A_G トスル。$A_G \ni f$ ニ對シテ

$$\rho_f(x, y) = \overline{\mathrm{fin}}_{a,b\in G} \left(|f(axb) - f(ayb)|\right)$$

デ G ノ metric ヲ定メレバ，

$$\rho_f(x, y) = \rho_f(sxt, syt) = \rho_f(x^{-1}, y^{-1})$$

スベテノ $f \in A_G$ ニ對シテカヽル ρ_f ヲ作リ、其ノ全体 $\{\rho_f\}$ デ定メル uniform structure $\mathfrak{U}$ ヲ考ヘル。$\rho_f\ (f \in A_G)$ ニ關シテハ G ハ totally bounded ナル故，$\mathfrak{U}$ 自身 totally bounded，從ツテ G ヲ $\mathfrak{U}$ ニ關シテ complete ニ拡大スレバ，bicompact group $\overline{G}$ ヲ得ル。（其ノ時 x^{-1} ガ一様連續デアルカラ）．

又 $\{u_{ij}(x)\}$ ヲ G ノ unitary 表現トスレバ，$u_{ij}(x) \in A_f$ ハ $\mathfrak{U}$ ニツイテ一様連續デアルカラ $\overline{G}$ ニマデ延長サレル。即チ延長 $\{\overline{u}_{ij}(x)\}$ ハ又 $\overline{G}$ ノ表現トナル。即チ G ノ上ノスベテノ almost periodic function ト $\overline{G}$ ノ上ノスベテノ連續函數トハ一致スル。又 G ノスベテノ unitary 表現系ハ $\overline{G}$ ノ上ノスベテノ連續 unitary 表現系トモ一致スル。

G ハ $\overline{G}$ 中 everywhere dense デアルガ，今 G

ニ topology ガアッテ、$A_G \ni f$ ガスベテGデ continuous ナモノヲ考ヘルナラバ，コノ embedding ハ又 continuous トナル。

其ノタメニハ $f = u_{ij}(x)$ ノ場合ニ，與ヘラレタ ε ニ對シテGノ單位元ノ近傍 $\mathfrak{U}$ ガ定マリ，$xy^{-1} \in \mathfrak{U}$ ナラバ $\rho_f(x,y) < \varepsilon$ ナラシメルコトガイヘレバ十分デアル。一般ノ場合ハ此ノ場合ニ容易ニ歸着サレル。サテ $(u_{ij}(x))$ ノ次數ヲ r トスレバ，$xy^{-1} \in \mathfrak{U}$ ナラバ

$$|u_{kl}(x) - u_{kl}(y)| < \frac{\varepsilon}{r^2} \quad (k, l = 1, \cdots\cdots, r)$$

ニナル樣ニ $\mathfrak{U}$ ヲ取ルコトガ出來ル。ソウスレバ

$$\begin{aligned}\rho_f(x,y) &= \overline{\mathrm{fin}}_{a,b}\left(|u_{ij}(axb) - u_{ij}(ayb)|\right)\\ &= \overline{\mathrm{fin}}\Big(\Big|\sum_{k,l} u_{ik}(a)\big(u_{kl}(x) - u_{kl}(y)\big) u_{lj}(b)\Big|\Big)\\ &\leqq \sum_{k,l}|u_{kl}(x) - u_{kl}(y)| \leqq \varepsilon\end{aligned}$$

トナル。 q.e.d.

故ニ一般ノGニ關スル双對定理（Tannaka, Satz 3, Satz 4, Satz 1）ハ定理6ニ歸着サレル譯デアル。

§ 7

上ノ議論ト關聯シテ，bicompact group ノ上ノ positive definite function（今マデノ意味トハ違ノ）ノ特性ヲ擧ゲルコトガ出來ル。先ヅ上ノ $u^{(\alpha)}_{ij}(x)$ ヲスベテ一ツノ番号デ書イテ（必ズシモ可算個デハナイガ）

$u_i(x)$ トスル。

$$(25)\quad \begin{cases} u_i(x)\,\overline{u_j(x)} = \sum_k a_{ij}^k\, u_k(x) \\ \overline{u_j(x)} = \sum_k b_j^k\, u_k(x) \qquad (b_j^k = a_{ij}^k) \end{cases}$$

ト有限和ニ分解出来ル。今Gノ上ノスベテノ Borel set 上デ定義サレタ completely additive non-negative measure m ($m(G)=1$) ガアッテ，ソレカラ

$$(26)\quad f_i = F(u_i) = \int_G u_i(x)\, m(dx)$$

ヲ作レバ

$$(27)\quad \sum_{ijk} a_{ij}^k f_k \xi_i \overline{\xi_j} \geqq 0$$

ガ任意ニ與ヘタ有限箇ノ complex numbers $\xi_1 \cdots \xi_n$ ニ對シテ成立スル。何トナレバ

$$\sum_{ijk} a_{ij}^k f_k \xi_i \overline{\xi_j} = \sum_{ij} \int u_i(x)\,\overline{u_j(x)}\, m(dx)\, \xi_i \overline{\xi_j}$$

$$= \left| \int \sum_i u_i(x) \xi_i\, m(dx) \right|^2 \geqq 0 \text{ —}$$

<u>定理7.</u> 『與ヘラレタ f_i ($i=1,2,\cdots\cdots$) ナル集リガ

$$f_i = \int_G u_i(x)\, m(dx) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots)$$

トシテ表ハサレルタメノ必要十分條件ハ (27) 及ビ

$$(28)\quad \overline{f_j} = \sum_k b_j^k f_k \qquad (i=1,2,\cdots\cdots)$$

ノ成立スルコトデアル。』

（証）必要ハ上ニ見タ十分ナルコト，§6デ考ヘタ Γ_G デ，$\Gamma_G \ni \sum \alpha_i u_i(x) \to \sum \alpha_i f_i$ ニヨッテ linear functional F ヲ定義スル。F ノ持ツ性質ハ (27), (28) カラ

$$(29) \quad F(f \cdot \bar{f}) \geqq 0, \quad F(\bar{f}) = \overline{F(f)}$$

デアル。之レカラ定理6ノ証明ト同様ニ F ヲ $\mathcal{R}_3$ 全体ニマデ擴張スルコトガ出来テ，且ツ (29) ハ其ノマヽ保タレル。

サテ $\varphi \in \mathcal{R}_3$ ヲ $\varphi(s) \geqq 0 \ (s \in G)$ トスル。任意ノ正数 ε ニ對シテ $\sqrt{\varepsilon + \varphi(s)}$ ヲ考ヘレバ，定理5ト Gelfand, Satz 20 トカラ，亦 $\mathcal{R}_3$ ニ屬スル。故ニ

$$0 \leqq F\left(\left|\sqrt{\varepsilon + \varphi(s)}\right|^2\right) = \varepsilon F(1) + F(\varphi)$$

故ニ $F(\varphi) \geqq 0$ トナル。特ニ $\Gamma_G \subset \mathcal{R}_3$ ナル故，F ハ Γ_G ノ上デ positive functional トナル。

$\mathcal{R}_0$ ヲ G ノ上ノ連続函数全体トスレバ，uniform topology ニ關シテ Γ_G ハ $\mathcal{R}_0$ 中 dense デアルカラ (almost periodic function ニ關スル approximation theorem ニ依ッテ) Γ_G 上ノ positive linear functional F ヲ $\mathcal{R}_0$ 全体ニマデ拡張シテ

(イ) $F(f+g) = F(f) + F(g)$

(ロ) $f(x) \geqq 0$ ナラバ $F(f) \geqq 0$

トスルコトガ出来ル。G ハ bicompact デアルカラ Riesz ノ定理カラ $F(f) = \int_G f(x)\, m(dx)$ ナル completely additive non-negative measure

が存在スル。

——（河田，森田，宮澤）——