934. Radon-Nikodym ノ定理ニ就テ

吉田耕作（阪大）

以下ニ述ベルヤウニ *maximal method* ヲ使ヘバ Saks ノ本 Theory of the integral ニ於ケル

ヨリモ早ク R−N ノ定理ノ証明ガ得ラレル様デスノミナラズ、コノヤリ方ダトソノマヽ lattice 論的ニ formulate デキテ Riesz, Freudenthal, 角谷等ノ結果ガ割合ニ direct ニ扱ヘル様デス。

§1. Concrete case

X ヲ任意ノ空間, $\mathfrak{X}$ ヲ X ノ部分集合 E ノ作ル countably additive class トスル, 即チ (i) 空集合 $\in \mathfrak{X}$, (ii) $E \in \mathfrak{X}$ ナラ E ノ餘集合 $CE \in \mathfrak{X}$, (iii) E_n ト共ニ和集合 $\bigvee_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{X}$。$\mathfrak{X}$ デ定義サレタ實數値ノ finite 函數 $F(E)$ ハ, 互ニ相素ナ集合列 $\{E_n\} \in \mathfrak{X}$ ニ對シテ $F(\bigvee_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$ ガ成立ツトキ countably additive ト呼ブ。$\mathfrak{X}$ デ c. a. 且ツ non-negative ナ $\varphi(E)$ ヲ一ツトリ之ガ X ノ上ニ測度ヲ定義スルモノト考ヘル。$\varphi(E) = 0$ ナラ $F(E) = 0$ ナル如キ c. a. ナ F ハ絶對連續, $\varphi(E_0) = 0$ ナル如キ $E_0 \in \mathfrak{X}$ ガ存在シテ $E \subset CE_0$ ナラ $F(E)$ ナル如キ c. a. ナ F ハ特異デアルト呼ブ。X ノ上デ定義サレタ實數値函數 $f(x)$ ハ全テノ實數 α ニ對シテ $E_x(f(x) > \alpha) \in \mathfrak{X}$ ナルトキ可測デアルト云フ。$\mathfrak{X}$, φ 及ビ可測函數ガ定義サレタ上ハ Lebesgue 型ノ積分 $\int_X f(x)\varphi(dx)$ —— Radon-Stieltjes 積分

ハ例ノ通リ定義サレル譯デス。（コノトキ可測函數 $f(x)$ ハ可積分デアルト云フ）. 不定積分 $F(E)=\int_E f(x)\varphi(dx)$ ガ c.a. 且ツ絶對連續ナコトハ周知デス。

以上念ノタメニ復習シマシタガ

$\boxed{\text{Radon-Nikodym ノ定理}}$ ハ任意ノ c.a. ナ $F(E)$ ハ unique ニ不定積分ト特異函數ノ和トシテ表ハサレルト云フノデアル。

Maximal method ニヨル證明. $F(E)$ ハ non-negative トシテ一般性ヲ失ハナイ。$[F]$ ヲモッテ

$F(E) \geqq \int_E f(x)\varphi(dx)$ ノ全テノ $E \in \mathfrak{X}$, ガ成リ立ツ樣ナ non-negative, 可積分ナ $f(x)$ ノ全体ヲ表ハシマス。

$$\mu = \underset{f\in[E]}{l.u.b.} \int_X f(x)\varphi(dx)$$

ト置クト $f_n(x) \in [F]$ 且ツ $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\varphi(dx) = \mu$ ナル如キ列 $\{f_n\}$ ガ存在スル。然ラバ $\bar{f}_n(x) = \sup_{n\geqq m} f_m(x) \in [F]$ 且ツ $f(x) = \sup_{n\geqq 1}\bar{f}_n(x) \in [F]$, $\int_X f(x)\varphi(dx) = \mu$ ナルコト直チニワカル。吾々ノ證明スベキコトハ $G(E) = F(E) - \int_E f(x)\varphi(dx)$ ノ特異函數ナコトデアル。コレヲ證明スルタメニ

補助定理 1. non-negative, c.a. ナ $G(E)$ ガ特異デナイナラ有理數 $\alpha > 0$ 及ビ $\varphi(E_\alpha) > 0$ ナル $E_\alpha \in \mathfrak{X}$

ガ存在シテ $E \subset E_\alpha$ ナルトキ $G(E) \geqq \alpha\varphi(E)$.

ガ云ヘレバヨイ。何者，E_α ノ特性函數ヲ $\frac{1}{\alpha}C_\alpha(x)$ トスルト $\{f(x)+C_\alpha(x)\} \in [F]$

且ツ $\int_X \{f(x)+C_\alpha(x)\}\varphi(dx) > \mu$ ナル μ ノ定義ニ矛盾スル結果ヲ得ルカラ。

<u>補助定理1′ノ証明</u>. Hahn ノ定理（Saks: loc. cit. 32）ニヨリ任意ノ（有理數）$\alpha > 0$ ニ對シ $E_\alpha \in \mathfrak{X}$ ガ定ツテ

$$E \subset E_\alpha \text{ ノトキ } G(E) \geqq \alpha\varphi(E),$$

$$E \subset CE_\alpha \text{ ノトキ } G(E) \leqq \alpha\varphi(E).$$

ヨッテ全テノ有理數 $\alpha > 0$ ニ對シテ $\varphi(E_\alpha) = 0$ トスルト $E_0 = \bigvee_{\alpha>0} E_\alpha$ モ亦 $\varphi(E_0) = 0$ 且ツ $E \subset CE_0$ ノトキ $G(E) = 0$ トナッテ G ハ特異函數ニナッテ了フ。

§2. 空間(A)

$\mathfrak{X}$ デ c.a. ナ $F(E)$ ノ全体(A)ハ vector lattice ニナル。即チスベテノ $E \in \mathfrak{X}$ ニ於テ $F(E) \geqq 0$ ナルトキ $F \geqq 0$（$F \geqq 0$ 且ツ $F \neq 0$ ナラ $F > 0$ ト書ク）トスレバ

(1) $F \geqq 0$, $\alpha \geqq 0$ ナラ $\alpha F \geqq 0$,

(2) $F \geqq 0$, $-F \geqq 0$ ナラ $F = 0$,

(3) $F \geqq 0$, $G \geqq 0$ ナラ $F+G \geqq 0$,

(4) semi-order $\geqq$ ニヨッテ(A)ハ lattice

ヲ作ル。

(實際 $F^+ = F \vee 0 = \sup(F, 0)$, $F^- = F \wedge 0 = \inf(F, 0)$ ハ夫々 $F^+(E) = \sup_{E' \subset E} F(E')$,

$F^-(E) = \inf_{E' \subset E} F(E')$ ニヨリ定義サレル)

良ク知ラレテルヤウニ $F = F^+ + F^-$, $|F| = F^+ - F^- = \sup(F, -F)$. 今 $\|F\| = |F|(X) = F$ ノ X ニ於ケル全変分トヲクト

(5) norm $\|F\| = \|(|F|)\|$ ニヨリ (A) ハ Banach 空間ヲ作リ且ツ

$F \geqq 0$, $G \geqq 0$ ナラ $\|F + G\| = \|F\| + \|G\|$

以下 (1) – (5) ヲ満足スル抽象空間 (A) ニ對シテモ上ノ max. method ソノマヽデ Radon–Nikodym ノ定理が formulate サレルコトヲ示サウ。任意ニ $\varphi > 0$ ヲ撰ビ (A) ノ unit ト呼ビ 1 デ表ハス。

$\alpha \cdot 1$ ヲ簡單ノタメニ α ト書ク。$E \geqq 0$ が $E \wedge (1 - E) = 0$ ヲ満足スルトキ E ヲ quasi-unit, quasi-units E_i ノ一次結合 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$ ヲ階段要素, 階段要素列ノ strong limit ト表ヘサレル如キモノヲ絶對連續要素ト呼ブ。又 $|G| \wedge 1 = 0$ ナル如キ G ヲ特異要素ト云フ。然ラバ

$\boxed{\text{定理 1}}$ 任意ノ要素 $\in$ (A) ハ unique ニ絶對連續要素ト特異要素ノ和トシテ表ハサレル。

(注意) 上ノ結果ハ Freudenthal ノ spectral theorem (Proc. Acad. Amsterdam, 39 (1936), 641—651 ヲ使ッテ出シタ角谷君ノ抽象L空間 (Ann. of Math., 42 (1941), 523—537) ト本質的ニ同ジコトデアルカ, spectral theorem ヲ使ハズ §1 ト同ジ idea デ出セル所ガ簡単カト思ヒマス。(勿論 Freudenthal ノ idea ハ使ヒマスガ)

<u>補助定理2.</u> (1)—(4) ヲ満足スル vector-lattice ハ <u>distributive</u>

即チ $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$,

$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

<u>証明.</u> 例ヘバ G. Birkhoff: Lattice theory, p. 108

<u>補助定理3</u> 階段要素ノ全体 $\mathfrak{T}$ ハ (A) ノ sublattice ヲ作ル。

<u>証明</u> Freudenthal ノ示シタ如ク quasi-unit E ノ全体 $\mathcal{E}$ ハ Boole 代数ヲ作ルコトハ直グワカル. 故ニ任意ノ $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$ ハ

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i E_i, \quad E_i \wedge E_j = 0$$

$(i \neq j)$, $E_i \in \mathcal{E}$ ト書ケル。ヨッテ

$$T_1 \vee T_2 = \sum_{i=1}^{n} \max(\alpha_i, \beta_i) E_i,$$

$$T_1 \wedge T_2 = \sum_{i=1}^{n} \min(\alpha_i, \beta_i) E_i .$$

補助定理 4　$0 \leqq F_1 \leqq F_2 \leqq \cdots\cdots$ 且ツ $\{\|F_n\|\}$ ガ有界ナラ $\sup(F_1, F_2, \cdots\cdots) = F$ ガ存在シ且ツ $\lim_{n\to\infty} \| F - F_n \| = 0$．之レカラ特ニ (A) ハ σ-complete (A) ノ上カラ（下カラ）押ヘラレタ系列ハ (A) 内ニ sup (inf) ヲ有スル。

（証明）[1] 良ク知ラレタ不等式 $|F| - |G| \leqq |F - G|$ カラ (5) ニヨリ

$$\|F\| - \|G\| \leqq \|(|F| - |G|)\| \leqq \|F - G\|$$

ヲ得ルカラ (A) ノ non-negative 要素ノ全体ハ strongly closed.

次ニ $\|F_n - F_m\| = \|F_n\| - \|F_m\|$, $n \geqq m$ ガ $m \to \infty$ ノトキ $\to 0$ ダカラ F_n ハ strong ニアル F ニ収斂スル。ヨッテ $F_n - F_m \geqq 0$, $n \geqq m$, ニ於テ $n \to \infty$ ナラシメ $F \geqq F_m$ $(m = 1, 2, \cdots\cdots)$．又モシ $G \geqq F_m$ $(m = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナラ $m \to \infty$ ナラシメ $G \geqq F$ ヨッテ $F = \sup(F_1, F_2, \cdots\cdots)$.

(A) ノ分解　$F > 0$ トシテ一般性ヲ失ハヌ．$[F]$ ヲ以テ $T \leqq F$ ナル如キ階段要素全体ノ集合トスル．

$\mu = \sup_{T \in [F]} \|T\|$ トヲクト $T_i \in [F]$, $\lim_{i\to\infty} \|T_i\| = \mu$

---

1) F. Riesz: Acta Szeged, 10 (1940), 1–20 ニヨル.

ナル如キ $\{T_i\}$ ガアル。$F_n=\sup_{m\geqq n}T_m\in[F]$（補助定理3ヲ使ッタ）．補助定理4ニヨリ $\overline{F}=\sup_{n\geqq 1}F_n$ $=\text{strong}\lim_{n\to\infty}F_n$ 且ツ $\|\overline{F}\|=\mu$. $F-\overline{F}=G\geqq 0$ ガ singular デナイトスルト有理数 $\alpha>0$ 及ビ quasi-unit $E_\alpha>0$ ガ存在シテ $G\geqq\alpha E_\alpha$（次ノ補助定理1′.） 然ラバ $\overline{F}+\alpha E_\alpha$ ハ $[F]$ ノ点列ノ strong limit，従ッテ μ ノ定義カラ

$$\|\overline{F}+\alpha E_\alpha\|=\|\overline{F}\|+\alpha\|E_\alpha\|\leqq\mu.$$

之ハ $\|\overline{F}\|=\mu$, $\|E_\alpha\|\neq 0$ ニ反スル。[2)]

<u>補助定理1′</u>. $G\geqq 0$ ガ特異デナイ（$G\wedge 1\neq 0$）ナラ有理数 $\alpha>0$ ト $E_\alpha>0$, $\in\mathcal{E}$ ガ存在シテ $G\geqq\alpha E_\alpha$

<u>証明</u>. 全テノ $\alpha>0$ ニ對シ $(G-\alpha)^+\wedge 1=0$ デハナイ。然ラズンバ補助定理2ニヨリ

$$0\leqq(G-\alpha)^+\wedge 1=((G-\alpha)\wedge 1)^+=((G\wedge(1+\alpha)-\alpha)^+$$

$=0$ 即チ $0\leqq G\wedge(1+\alpha)\leqq\alpha$ ヲ得テ $G\wedge 1=0$ トナルカラ、ヨッテ今 $(G-\alpha)^+\wedge 1\neq 0$ 即チ $(G/\alpha-1)^+\wedge 1\neq 0$ （$\alpha>0$）トスルト補助定理4デ

$$E_\alpha=\sup_{n\geqq 1}\left(n(G/\alpha-1)^+\wedge 1\right)\text{ 存在シ且ツ }>0$$

---

2) 上ノ証明カラ F ノ絶對連續部分 $\overline{F}$ ハ單調増加ナ階段要素列ノ sup デモアリ strong limit デモアル。