937. 標數 p ノ係數体ニ於ケル Gruppenring ニ就テ II

大島　勝（高知高校）

4 einreihig ナ gruppenring

定理 1 ノ後半、即チ位數 $g = g'p^a$ ノ群 $\mathfrak{G}$ ノ標數 p ナル Körper K ニ於ケル Gruppenring Γ ハ g ガ位數 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{G}'$ ヲモチ、且ツ Sylow-gruppe ガ zyklisch ナルトキニ限リ einreihig ニナルコトヲ証明シマス。K ニ於テ $\mathfrak{G}$ ノ既約表現ガスベテ絶

對既約ナルトキニ証明シテオケバ十分デアル。

必要ナルコト.

g が位数 g' ノ Normalteiler g' ヲモツコトノ必要ナコトハ I ニヨリ明カデアル。

然ルトキハ Gruppenring Γ ハ primär zerlegbar デアルカラ.

(1) $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots\cdots+\Gamma_{k'}$

Einsdarstellung ニ對應スル vollständig primär ナ Ideal Γ_i ハ Sylowgruppe $\mathfrak{p}$ ノ Gruppenring ト isomorph デアルカラ, Γ_i ガ einreihig ナルタメニハ $\mathfrak{p}$ ガ zyklisch ナルコトガ必要デアル. (Brummund)

十分ナルコト.

次ニ $\mathfrak{p}$ ガ zyklisch ナルトキハ primär ナ Ideal Γ_k ガスベテ einreihig ニナルコトヲイヘバヨイワケデスガ、F_k ガ highest kind ナルトキハ Γ_k ハ einfach デスカラ F_k ガ highest kind デナイモノノミヲ考ヘレバヨイ. ソノタメニ準備トシテ補助定理ヲ先ヅ証明スル。

以下暫ク Γ ハ primär zerlegbar デ、$\mathfrak{p}$ ヲ P ニヨリテ erzeugen サレル zyklisch ナ Sylowgruppe トスル。

(1) ナル分解ニ対シテ g' ノ Gruppenring ハ

(2) $\Gamma'=\Delta_1+\Delta_2+\cdots\cdots+\Delta_{k'}$

ナル分解ガ對應スル．但シ

(3) $\quad \Delta_k = \Gamma'_{k1} + \Gamma'_{k2} + \cdots\cdots + \Gamma'_{kS}$

デ、Γ_k ニ属スル $\mathfrak{g}$ ノ既約表現 F_k ニ對應スル $\mathfrak{g}'$ ノ相似表現ヲ F'_{k1}, F'_{k2}, -----, F'_{kS} トスルトキ $\Gamma'_{k\lambda}$ ハ $F'_{k\lambda}$ ニ對應スル単純イデアルデアル。

(4) $\quad \Gamma_k = \Delta_k + P\Delta_k + P^2\Delta_k + \cdots\cdots + P^{m-1}\Delta_k,$

$$(m = p^a)$$

デアル。

以下簡單ノタメ F'_{k1} ヲ F'_k ト書クコトニスル．F'_k ノ Charakter ヲ χ'_k デ表ハストキ

(5) $\quad \chi'_k(G') = \chi'_k(P^{-1}G'P)$

ガ成立スルトキハ相似表現類ハ只一ツノ既約表現 F'_k ヲ含ミ、從ッテ

$$\Delta_k = \Gamma'_k$$

トナル。

<u>補助定理 I.</u>

F_k ニ對應スル F'_k ニツイテ $\chi'_k(G') = \chi'_k(P^{-1}G'P)$ ガ成立スルトキハ Γ_k ノ Radikal ハ

(6) $\quad N_k = (E-P)\Gamma_k = \Gamma_k(E-P)$

トナル。

(証明) Γ_k ハ次ノ如ク表ハサレル。

$$\Gamma_k = \Gamma'_k + P\Gamma'_k + \cdots\cdots + P^{m-1}\Gamma'_k$$

$$=\Gamma'_k+\Gamma'_k P+\cdots\cdots+\Gamma'_k P^{m-1}$$

$$=\Gamma'_k+\Gamma'_k(E-P)+\Gamma'_k(E-P^2)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\Gamma'_k(E-P^{m-1})$$

(5)ニヨリ $P^{-1}\Gamma'_k P=\Gamma'_k$ ガ成立スル故

$$T=\Gamma'_k(E-P)+\Gamma'_k(E-P^2)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\Gamma'_k(E-P^{m-1})$$

ハ Γ_k ノ左イデアルトナル。

今 Γ_k/T, Γ_k/N_k ヲ夫々 $\mathfrak{g}'$ ノ Darstellungsmodul ト考ヘレバ共ニ Γ'_k ニ isomorph デアル。

(7) $$\Gamma_k/T \cong \Gamma_k/N_k \cong \Gamma'_k$$

(F_k ハ lowest kind ナル故 $F_k(\mathfrak{g}')\cong F'_k$ デアル)

故ニ Γ_k/T ト Γ_k/N_k ニヨル $\mathfrak{g}$ ノ表現ハ $\mathfrak{g}'$ ニ對應スル Matrix ノミヲ考ヘレバ $\mathfrak{g}'$ ノ表現トシテ äquivalent ナル故、同ジ既約成分ヲ有ス、N_k ト T ノ Rang ガ相等シキ故 $N_k=T$ トナル。

$$N_k=\Gamma'_k(E-P)+\Gamma'_k(E-P^2)+\cdots+\Gamma'_k(E-P^{m-1})$$

同様ニ右イデアルニツイテ考ヘレバ

$$N_k=(E-P)\Gamma'_k+(E-P^2)\Gamma'_k+\cdots\cdots+(E-P^{m-1})\Gamma'_k$$

ガ成立スル。

$$E-P^{i}=(E-P)+P(E-P^{i-1})$$

ナル故、上式ノ右辺ハ夫々 $\Gamma_{\kappa}(E-P)$, $(E-P)\Gamma_{\kappa}$ トナル. 故ニ

$$N_{\kappa}=\Gamma_{\kappa}(E-P)=(E-P)\Gamma_{\kappa}$$

補助定理2.

F_{κ} ニ對應スル F'_{κ} ニツイテ $\chi'_{\kappa}(G')=\chi'_{\kappa}(P^{-i}G'P^{i})$ ヲ満足スル i ノ中最小ナルモノヲ $p^{\alpha_{\kappa}}$ トスレバ Γ_{κ} ノ Radikal ハ

$$(8)\quad N_{\kappa}=\Gamma_{\kappa}(E-P^{p^{\alpha_{\kappa}}})=(E-P^{p^{\alpha_{\kappa}}})\Gamma_{\kappa}$$

(証明) $p^{\alpha_{\kappa}}=1$ ナルトキハ補助定理1ナル故 $p^{\alpha_{\kappa}}\neq 1$ トシ且ツ $P^{p^{\alpha_{\kappa}}}=Q$ デ表ハスコトニスル。$Q^{p^{a-\alpha_{\kappa}}}=E$ デアル。

今 Q ニヨッテ erzeugen サレル $\mathfrak{P}$ ノ部分群ヲ $\mathfrak{P}_{\kappa}$ トスレバ $\mathfrak{G}'\mathfrak{P}_{\kappa}$ ニツイテ補助定理1ガ適用出来ル. 即チ

$$\Gamma^{*}_{\kappa}=\Gamma'_{\kappa}+Q\Gamma'_{\kappa}+\cdots\cdots+Q^{(p^{a-\alpha_{\kappa}}-1)}\Gamma'_{\kappa}$$

トスレバ Γ^{*}_{κ} ノ Radikal ハ $\Gamma^{*}_{\kappa}(E-Q)=(E-Q)\Gamma^{*}_{\kappa}$ デアル。

Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ ハ zyklisch ナル故 F'_{κ} ト相似ナ既約表現 $F'_{\kappa\lambda}$ ニハスベテ同一ノ元 Q ガ對應スル.

従ッテ

$$\Delta^{*}_{\kappa}=\Delta_{\kappa}+Q\Delta_{\kappa}+\cdots\cdots+Q^{(p^{a-\alpha_{\kappa}}-1)}\Delta_{\kappa}$$

ノ Radikal ヲ N^{*}_{k} トスレバ

$$N^{*}_{k} = \Delta^{*}_{k}(E-Q) = (E-Q)\Delta^{*}_{k}$$

次ニ

$$\Gamma_{k} = \Delta^{*}_{k} + p\Delta^{*}_{k} + \cdots\cdots + p^{(p^{\alpha_k}-1)}\Delta^{*}_{k}$$

及ビ

$$\Gamma_{k}/N_{k} = \Delta^{*}_{k}/N^{*}_{k} + p\left(\Delta^{*}_{k}/N^{*}_{k}\right) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + p^{(p^{\alpha_k}-1)}\left(\Delta^{*}_{k}/N^{*}_{k}\right)$$

(既約表現ノ Konstruktion 参照)

ナル故、Rang ヲ比較スルコトニヨリ

$$\begin{aligned} N_{k} &= N^{*}_{k} + pN^{*}_{k} + \cdots\cdots + p^{(p^{\alpha_k}-1)}N^{*}_{k} \\ &= (\Delta^{*}_{k} + p\Delta^{*}_{k} + \cdots\cdots + p^{(p^{\alpha_k}-1)}\Delta^{*}_{k})(E-Q) \\ &= \Gamma_{k}(E-Q) \end{aligned}$$

即チ

$$N_{k} = \Gamma_{k}(E-Q) = (E-Q)\Gamma_{k}$$

補助定理 1, 2 ニヨリ Sylowgruppe ガ zyklisch ナルトキハ primär ナ Ring Γ_{k} ノ Radikal ハ Hauptideal デアルコトガ分ツタ. 従ツテ Γ_{k} ハ einreihig デアル (浅野, über verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit ......, P. 234)

以上ニヨリ定理 1 ハ完全ニ証明出来タ。

5. ツマラナイ問題デスガ、$\mathfrak{G}$ ノ既約表現 Z_i ($i=1, 2, \cdots\cdots, n$) ガ modular field ニ移ッタトキモ、スベテ既約デアルヤウナ群ハドンナモノカ調ベテ見マシタ。

コノ様ナ群トシテハ、位数ガ p ト素ナル群、位数ガ p ト素ナル群ト Abelsch ナ p-gruppe トノ直積ニナッテヰル群及ビ Sylowgruppe ガ Normalteiler デナイ例トシテハ、$p=3$ ナルトキノ交代群 $\mathfrak{A}_4$ 等デアリマス、得ラレタ結果ハ

定理

位数 $g=g'p^a$ ノ群 $\mathfrak{G}$ ノ既約表現 Z_i ($i=1, 2, \cdots\cdots, n$) ガ標数 p ノ Körper ニ於テモ、スベテ既約ナルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{G}$ ガ位数 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{G}'$ ヲ有シ、$\mathfrak{G}'$ ニ含マレル $\mathfrak{G}$ ノ共軛類ノ中ソノ含ンデヰル元ノ個数ガ p^i ニテ丁度割レルモノノ個数ヲ m_i トスルトキ

$$(9)\quad \sum_{i=0}^{a} m_i p^{a-i} = n, \quad n \text{ハ} \mathfrak{G} \text{ノ共軛類ノ個数}$$

ガ成立スルコトデアル。

注意1. (9) ノ左辺ハ丁度 Cartan Invariants ノツクル Matrix C ノ Spur ナル故 (9) ハ $Sp(C)=n$ トモ書ケル。

注意2. $\mathfrak{G}$ ノ Gruppenring Γ ガ Primär zerlegbar ナルトキハ

$$S_p(C)=\sum_i m_i\,p^{a-i}\geqq n$$

ガ成立スル．Γ ガ primär zerlegbar デナイトキモ、コノ式ガ成立スルト面白イノデスガ．

先ヅ最初ニ Z_i ガ modular field ニ移ッテモスベテ既約ナルタメニハ $\mathfrak{G}$ ガ位数 g' ノ Normalteiler ヲモツコトガ必要ナルコトヲ証明スル。ソレニハ次ノ補助定理ヲ証明スレバ十分デアル。尚 Z_i ガ moduler field ニ移ッタトキノ表現ヲ $\overline{Z}_i$ デ表ハスコトニスル。

補助定理3.

Einsdarstellung Z_1 ヲ含ム Block B_1 ニ属スル既約表現 Z_i ニツイテ $\overline{Z}_i$ ガスベテ既約ナルタメニハ、$\mathfrak{G}$ ガ位数 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{G}'$ ヲ有シ、Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ ガ abelsch ナルコトガ必要且ツ十分デアル。

（証明） 十分条件ナルコトハ明カデアル。

B_1 ニ含マレル既約表現ノ中 $\overline{Z}_i\cong F_1$ ナルモノヲ $Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_t$ トスル。decomposition number ヲ考ヘレバ

$$\begin{aligned} d_{i1} &= 1 \quad (1\leqq i\leqq t)\\ &= 0 \quad (t<i)\end{aligned}$$

故ニ Cartan Invariant c_{11} ヲ考ヘレバ

$$C_{11}=\sum_{i=1}^{n} d_{i1} d_{i1}=t$$

即チ直既約表現 U_1 ハ F_1 ヲ t 個含ンデキル。

$\mathfrak{G}$ ノ標數 0 ノ Körper ニ於ケル正規表現ヲ S, S ヲ完全可約ナ形ニ transform シタモノヲ T トスレバ $\overline{S}$, $\overline{T}$ ハ同ジ既約成分ヲ有ス、且ツ $\overline{S}$ ハ $\mathfrak{g}$ ノ正規表現デ、且ツ B_1 ニ屬スル Z_λ ニツイテ・$\overline{Z}_\lambda$ ハスベテ既約デアルカラ $\overline{S}$ ハ既約成分トシテ F_1 ヲ t 個含ンデキル、然ルニ U_1 ハ F_1 ヲ既ニ t 個含ンデキルカラ他ノ直既約表現 U_k ハ F_1 ヲ含マナイ。即チ B_1 ハ F_1 ノミヲ有スルカラ $\mathfrak{g}$ ハ位數 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{g}'$ ヲモタナケラバナラナイ、コノトキハ $\overline{Z}_i \cong F_1$ ナル既約表現 Z_i ハスベテ Sylowgruppe $\mathfrak{p}$ ノ表現デアルカラ Z_i ノ次數ガ 1 ナルコトカラ $\mathfrak{p}$ ハ Abelsch ナルコトヲ要ス。

以下，又 $\mathfrak{g}$ ノ Gruppenring Γ ヲ Primär Zerlegbar トスル。

$\mathfrak{g}$ ノ既約表現 Z_κ ガ對應スル相似表現 $F_{\kappa\lambda}$ ヲ U_κ 個含ンデキルトスレバ、$\overline{Z}_\kappa$ ハ既約成分トシテ U_κ 個ノ F_κ ヲ含ムカラ $\overline{Z}_\kappa$ ガ既約ナルタメノ必要十分條件ハ $U_\kappa=1$ デアル。コヽニ U_κ ハ所謂 decomposition number デアル。

次ニ α-type ノ Block B_κ ニ屬スル既約表現ヲ $Z_{\kappa i}$ $(i=1,2,\cdots\cdots s)$ トスレバ

$$p^{a-\alpha}=\sum_{i=1}^{s} U_{\kappa i}^2$$

従ツテ $\overline{Z}_{\kappa i}$ ガスベテ既約ナルタメノ必要十分條件ハ、スベテノ $u_{\kappa i}=1$ ナルコト即チ $p^{a-\alpha}=S$ ガ成立スルコトデアル。$u_{\kappa i}$ ノ中少クトモ一ツ1ヨリ大ナルモノガアルトキハ　$p^{a-\alpha}>S$

補助定理4.

α-type ノ Block B_κ ニ屬スル既約表現ガ modular field ニテ、スベテ既約ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ

$$p^{a-\alpha}=S,$$

S ハ B_κ ニ屬スル既約表現 $Z_{\kappa i}$ ノ個数ガ成立スルコトデアル。

スベテノ Block ニツイテ考ヘレバ

$$(10)\quad \sum_{\alpha=0}^{a} m_\alpha p^{a-\alpha}=n,$$

$$\begin{cases} m_\alpha \text{ ハ } \alpha\text{-type ノ Block ノ個数.} \\ n \text{ ハ既約表現 } Z_i \text{ ノ個数.} \end{cases}$$

ガ成立スルトキニ限リ、スベテノ $\overline{Z}_i$ ハ既約デアル。m_α ハ g' ニ含マレル g ノ共軛類ノ中、ソノ含ム元ノ個数ガ p^α ニテ丁度割リ切レルモノノ個数ニ等シキ故，以上述ベタコトト、補助定理3ヨリ始メニ述ベタ定理ヲ得ル。

尚定理ニ於ケル(9)ハ Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ ガ Abelsch ナルコトヲ含ンデヰルワケデス。

6. 順序ガ逆ニナリマシタガ Γ ガ Primär zerlegbar ナルトキ各 Γ_κ ノ Radikal ヲ求メテ見マシタノデ書

キ加ヘテオキマス、方針ハ einreihig ナ場合ト殆ンド同様デアルカラ、結果ダケアゲテオキマス。

$$\Gamma_k = \Delta_k + P_1\Delta_k + P_2\Delta_k + \cdots\cdots + P_{m-1}\Delta_k,$$
$$(m = p^a)$$

$$\Delta_k = \Gamma'_{k1} + \Gamma'_{k2} + \cdots\cdots + \Gamma'_{ks}$$

トシマス。又

$$\Gamma^*_k = \Gamma'_k + P_1\Gamma'_k + \cdots\cdots\cdots + P_{m-1}\Gamma'_k$$

(Γ'_{k1} ヲ Γ'_k ト書クコトニスル)

トスレバ Γ^*_k ハ Γ_k ノ左イデアルデアル。

今 F_k ニ對應スル $\mathfrak{P}$ ノ部分群ヲ $\mathfrak{P}_k$ トシ $\mathfrak{P}$ ノ $\mathfrak{P}_k$ ニヨル分解ヲ

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_k + Q_1\mathfrak{P}_k + \cdots\cdots + Q_{l-1}\mathfrak{P}_k$$

トスレバ Γ_k ノ Radikal N_k ハ次式デ與ヘラレル。

$$(11.)\quad N_k = \Gamma^*_k\tilde{N}_k + Q_1^{-1}\Gamma^*_k\tilde{N}_k Q_1 + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + Q_{l-1}^{-1}\Gamma^*_k\tilde{N}_k Q_{l-1}$$

但シ $\tilde{N}_k$ ハ $\mathfrak{P}_k$ ノ gruppenring ノ Radikal ヲ表ハス。

特ニ $\mathfrak{P}_k$ ガ $\mathfrak{P}$ ノ Normalteiler ナルトキハ

$$\begin{aligned} N_k &= \Gamma^*_k\tilde{N}_k + Q_1^{-1}\Gamma^*_k Q_1\cdot\tilde{N}_k + \cdots\cdots + Q_{l-1}^{-1}\Gamma^*_k Q_{l-1}\cdot\tilde{N}_k \\ &= (\Gamma^*_k + Q_1^{-1}\Gamma^*_k Q_1 + \cdots\cdots + Q_{l-1}^{-1}\Gamma^*_k Q_{l-1})\cdot\tilde{N}_k \\ &= \Gamma_k\tilde{N}_k \end{aligned}$$

更ニ $\mathfrak{P}_k$ ガ Normalteiler デ且ツ zyklisch ナル

トキハ、ソノ Erzeugend ヲ P_k トスレバ

$$N_k = \Gamma_k(E - P_k) = (E - P_k)\Gamma_k$$

トナル。故ニ Γ_k ガ einreihig ニナルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{P}_k$ ガ $\mathfrak{H}$ ノ Normalteiler デ且ツ zyklisch ナルコトデアル。