939. $z = x + \alpha y$, $(\alpha^2 = \mu + \nu\alpha)$, $\zeta = \xi + \alpha\eta$ ニ對スル $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\iint_A \frac{\frac{df(\zeta)}{dA}}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta$ ニ就テ

高須　鶴三郎(東北大)

前回マデノ談話デハ P. F. Capelli, Sobre las funciones holomorphas y poligenas de una variable compleja binaria, Anales de la sociedad cientifica Argentina, III. 128 (1939), 154―174 ニアル $f(x+\alpha y)$, $(\alpha^2 = \mu + \nu\alpha$; μ, ν: 實數)ガ調査不能ノマヽノ $f(x+my)$, $(m = i, p, h$; $i^2 = -1$, p = Infinitesimale, $p^2 = 0$, $h^2 = +1)$ ノ理論ノ現在及ビ將來ノコトヲ述ベマシタガ、其ノ後之レヲ見ルコトガ出來マシタカラ, 同方面ノ準備研究ノ最後報告ヲサセテ頂キマス. 此ノ論文ハ, J. Rey Pastor, Funciones de Variable Compleja Binaria, Boletin del

Seminario Matemático, Buenos Aires, 19 (1936), 101—116 ト共ニ $f(x+\alpha y)$ ニ関スル唯二ノ文献デアリマスカラ，其ノ理論ノ現状ノ全貌ガハッキリ分ッテ自信ガツキマシタ。

$\dfrac{df(z)}{dz}$ 及ビ dérivée aréolaire $\dfrac{df(z)}{dA}$ ニ関スルコトハ之等両論文デ大体ヨクヽヽッテアリマスガ，Capelli ノ方ハ積分論ヲ欠ギ，Pastor ノ方デハ積分論ヲヽヽッタ形ニハナッテ居リマスガ，其ノ Hintergrund ニナル N.E. parabolic geometries ノ認識ナシニヽヽッテアリマスノデ，従テ polar coordinates デ $z=x+\alpha y=\rho\alpha^{\frac{2-\nu}{2\alpha-\nu}}e^{\alpha\theta}$，$(\rho=\sqrt{x^2+\nu xy-\mu y^2})$ ト表ハサルルコトヲ知ラズ，従テ

$$\int_C \frac{dz}{z-\zeta}=\int_C\frac{d\rho}{\rho}+\alpha\int_C d\theta=2\pi i\alpha,$$

$$(\rho=\text{const})$$

ナドノ計算ヲスル時，C ヲ

$\nu^2+4\mu<0$ ナル時ハ 或ル円	$\nu^2+4\mu=$ 無限小ナル時ハ 或ル Parabola	$\nu^2+4\mu>0$ ナル時ハ 或ル conj. hyperbolas

デ置キ換ヘルコトヲ知ラバ，三ツノ場合共円デヤレル様ニ書イテアリ，明ニ積分論ハ台無シデアリ，power series ニハ未ダ歯ガ立タヌ状態ニアリマスカラ，$f(x+\alpha y)$ ノ理論ハ微分論以外ハ処女地ニ近ク，吾々ノ斧鉞ヲ待ッテ居リマス。況ンヤ bicomplex 及ビ tricomplex ノ場合ハ真實

ノ領域デアリ吾々ノ滅私奉公ノ好天地デアルトノ確信ガツキマシタ。

茲ニハ見本トシテ積分論ノ基礎ノ要所ヲ占メル表題ノ公式ヲ導イテ見マス。

$f(z)=u(x,y)+\alpha v(x,y)$ ハ一意連続デ, u_x, u_y, v_x, v_y ガ存在スルモノトシ, *dérivée aréolaire* $\dfrac{df(z)}{dA}$ ガ存在スルモノトシテ,

$$\frac{df(z)}{dA}=u_1(x,y)+\alpha v_1(x,y)$$

ト置キマス. ソウスルト知レテ居ル如ク

$$u_1\equiv\mu v_x-u_y,\quad v_1\equiv u_x+\nu v_x-v_y$$

デ, 特別ノ場合 $u_1=0$, $v_1=0$ ガ Cauchy-Riemann ノ式ヲ與ヘマス. 又 A ヲ閉曲線 C ノ面積トシテ

$$(1)\quad \int_C f(z)\,dz=\iint_A\frac{df(z)}{dA}\,dx\,dy$$

ガ知レテ居リマス. 今

$$\frac{1}{2\pi i\alpha}\iint_D\frac{\dfrac{df(\zeta)}{dA}}{z-\zeta}\,d\xi\,d\eta,\quad(\zeta=\xi+\alpha\eta)$$

ヲ考ヘマスト, 之ハ D ニ於ケルコノ連續函數ヲ定義シマス. 次ニ

$$(2)\quad f(z)\equiv h(z)+\frac{1}{2\pi i}\iint_D\frac{\dfrac{df(\zeta)}{dA}}{z-\zeta}\,d\xi\,d\eta$$

ト置クト, $h(z)$ ハ D ニ於ケル連續函數デアリマス. 下ニ D ニ横ハル任意閉曲線 C ニツイテ $\int_C h(z)\,dz=0$ ナルコ

トヲ示シマセウ。(2) カラ

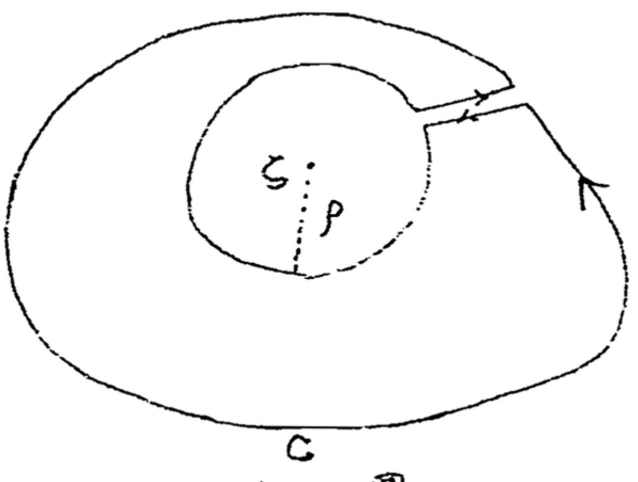
$$(3)\quad \int_C f(z)\,dz=\int_C h(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i\alpha}\int_C dz\iint_D \frac{\frac{df(\zeta)}{dA}}{z-\zeta}\,d\xi\,d\eta$$

ヲ得マス。 $z-\zeta=\rho\alpha\frac{z-\nu}{2\alpha-\nu}e^{\alpha\theta}$ ト置キマスト

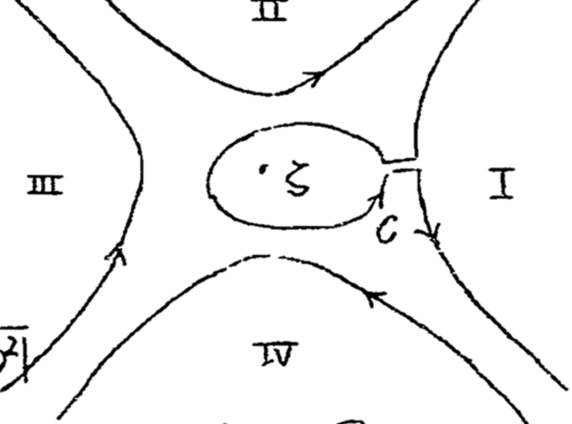
$$\frac{dz}{z-\zeta}=d\log(z-\zeta)=d\log(\rho e^{\alpha\theta})$$

$\nu^2+4\mu\geqq 0$ ナル場合ニハ，ρ ト $e^{\alpha\theta}$ トハ別々ニ Complex ニナル場所モアリマスが，ヨク檢メルト，$\rho e^{\alpha\theta}$ ハ全体トシテハ常ニ實デアリマス。

$\nu^2+4\mu<0$ ノ場合ニハ $f(x+iy)$ ノ場合ニヨクヤル様ニ，第一圖ノ様ナ閉曲線ニ沿ヒテ $\int\frac{dz}{z-\zeta}=0$ ナルコトヲ利用シテ，C ヲ中心が ζ，半徑が $|\rho|$ ナル円デ置キカヘマスが，$\nu^2+4\mu=$ 無限小ノ時ハ其ノ極限ノ場合トシテ或ル parabola ヲトリ，$\nu^2+4\mu>0$ ノ時ハ第二圖ニ示シタ様ナ conjugate hyperbolas が中心 ζ カラ等距離 $|\rho|=\sqrt{|(x-\xi)^2+\nu(x-\xi)(y-\eta)-\mu(y-\eta)^2|}$ $=$（一定）ノ点 (x,y)



第一圖



第二圖

ノ軌跡トナリ，第一圖ノ円ノ代リニ之等 hyperbolas ヲトルコトニナリマス。

其ノ時 ζ カラ出ス radius-vector ハ I ナル angular domain デハ實ナル角ヲ $-\infty$ カラ $+\infty$ 迄描キマスが，漸近線ヲ一度越エル毎ニ $\frac{\pi}{2}\frac{i}{\alpha}$ ヲ加ヘテ，結局一周スルト角 $2\pi\frac{i}{\alpha}$ ヲ描キマス、ソノ際實角ハ I, II, III, IV ノ angular domain 分デ cancel シテ物言ハナクナルノデス．parabola ノ場合ハ両漸近線が一致シタ場合デスカラ矢張リ一周角ハ $2\pi\frac{i}{\alpha}$ デスが，α が無限小デスカラ，limit ヲトル計算が含マレテ来マス．ソシテ三ツノ場合ヲ通ジテ結局

$$\alpha\int d\theta = 2\pi\frac{i}{\alpha}\alpha = 2\pi i$$

トナリマス、ソシテ

$$\int_C \frac{dz}{z-\zeta} = \int_{(\zeta,\rho)}\frac{d\rho}{\rho} + \alpha\int_{(\zeta,\rho)} d\theta = 2\pi i$$

$(\rho = 一定)$

斯ソテ (3) ハ次ノ如クナリマス。

$$(4) \quad \int_C f(z)\,dz = \int_C h(z)\,dz + \iint_D \frac{df(\zeta)}{dA}\,d\xi\,d\eta$$

(1) ト (4) トカラ $\int_C h(z)\,dz = 0$ が出マス。

次ニ D ニ横ハル任意閉曲線 G ニツイテ (2) ノ両辺ニ $\frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$ ヲ行ヒマスト

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{h(z)}{z-\zeta}\,dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{df(\zeta)}{dA}\,d\xi d\eta\int_G \frac{dz}{(z-\zeta)^2}$$

然ルニ明ニ $\int_G \frac{dz}{(z-\zeta)^2}=0$. 又第一圖, 第二圖ノCニ今ノGヲ選ヘ, $|\rho|\to 0$, $z\to\zeta$ ヲトルト

$$(6)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{h(z)}{z-\zeta}\,dz=h(\zeta)$$

ガ示サレ, (5)ト(6)トカラ

$$(7)\quad h(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$$

ガ出テ来, 従テ z ト ζ トヲ入レカヘテ書クト, (2)ハ

$$(8)\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{\frac{df(\zeta)}{dA}}{\zeta-z}\,d\xi d\eta$$

ガ得ラレ, $G=C$, $D=A$ ナル場合ガ表題ノ公式デアリマス。

A デ $\frac{df(z)}{dA}=u_1+\alpha v_1=0$ 従テ $u_1=\mu v_x-u_y=0$, $v_1=u_x+\nu v_x-v_y=0$ ナル場合ノ $f(z)$ ヲ A デ α-holomorph デアルト呼ブト, 其ノ時ニ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

ガ得ラレ, power-series ヲコナス道ガツキマス。

$\mu=-1,\ \nu=0$ $\quad|\ \mu=$無限小$,\ \nu=0\ |\quad \mu=1,\ \nu=0$

ノ時ガ即チ

$f(x+iy),\ i^2=-1$ $\quad|\ f(x+py),\ p^2=0\ |\quad f(x+hy),\ h^2=+1$

ノ場合デアリマス。

一般ノ場合、即チ $\alpha^2=\mu+\nu\alpha$ ノ時ハ trigonometry

が

$$\sin\alpha\theta=\frac{e^{\alpha\theta}-e^{-\alpha\theta}}{2\alpha-\nu},\quad \cos\alpha\theta=\frac{\alpha(e^{\alpha\theta}+e^{-\alpha\theta}-\nu e^{\alpha\theta})}{2\alpha-\nu}$$

ガ土台トナリ，$z=x+\alpha y$ ノ共軛数ハ $\bar{z}=x+\bar{\alpha}y=x+(\nu-\alpha)y$ デアリマシテ，$\bar{z}=x-\alpha y$ トナルノハ $\nu=0$ ノ時ニ限リマス。

之デ $f(x+\alpha y)$ ノ理論ノ文献ト見透シトニ確信ヲ得マシタカラ順次執筆シテ印刷物デ皆様ノ御叱正ヲ仰ギ，bicomplex, tricomplex ノ場合ニ及ビタイ希望デアリマス。

N.B. (i) 前述ノ積分計算ノ C ヤ G ニ於テ $\nu^2+4\mu=0$ ノ場合ニハ有限ニ漸近線ヲ有ツ parabola 即チ平行直線ヲトルコトニナリマス。 (ii) integrand ノ分母ノ $z-\zeta$ 等ガ Nullteiler ニナル所ハ $|\rho|=(\text{一定})\neq 0$ デ除イテアリマス。 (iii) 幾何学ノ見地ヨリハ三ツノ標準形 $f(x+my)$，$(m=i, p, h;\ i^2=-1,\ p=$ Infinitesimale, $p^2=0,\ h^2=+1)$ サヘ扱ヘバ充分デスガ Analysis トシテハ Pastor, Capelli 式ニ $f(x+\alpha y)$，$(\alpha^2=\mu+\nu\alpha)$ ト一般ニシテ general theory ヲ作リ，elliptic functions, automorphic functions, triangle-functions, modular functions, algebraic functions 等ノ美シイ特論ニ至ッテ canonical form ニ移ルノガ経済的ト分リマシタ。