

941. 函数方程式

$$f(x+y)f(x-y) = \frac{f^2(x) + f^2(y)}{1 - k^2(1-f^2(x))(1-f^2(y))} - 1$$

($1 \geq k \geq 0$) = 就イテ

春 木 博 (神戸高等商船)

今函数方程式

$$(F) \quad f(x+y)f(x-y) = \frac{f^2(x) + f^2(y)}{1 - k^2(1-f^2(x))(1-f^2(y))} - 1$$

($1 \geq k \geq 0$)

ヲ満足シ、原点ノ近傍ニ定符号且ツ可測ナル函数 $f(x)$ ヲ求
メテ見ヨウ。

(F) = 於テ $x=y=0$ トオケル常數解ヲ除ケバ $f(0) = \pm 1$
ナルコトが判ル。 $f(x)$ が解トラバ $-f(x)$ 亦解ナル故、
 $f(0) = 1$ トシテ以下論ズル。

(F) = 於テ $y = x$ トオケバ

$$(1) f(2x) = \frac{2f^2(x)}{1-f^2(1-f^2(x))^2} - 1$$

(F) = 於テ x , $y = x+y$, z , $x-y = x-y$ ヲ代ヘバ

$$f(2x)f(2y) = \frac{f^2(x+y) + f^2(x-y)}{1-f^2(1-f^2(x+y))(1-f^2(x-y))} - 1$$

上式ハ (1) ヲ代入スレバ

$$(2) \left\{ \frac{2f^2(x)}{1-f^2(1-f^2(x))^2} - 1 \right\} \left\{ \frac{2f^2(y)}{1-f^2(1-f^2(y))^2} - 1 \right\} \\ = \frac{f^2(x+y) + f^2(x-y)}{1-f^2(1-f^2(x+y))(1-f^2(x-y))} - 1$$

(F) 及ビ (2) ヲ $f(x+y)$, $f(x-y)$ = 關スル聯立方程式ト見テ、ソノ實根條件ヲ求ムレバ常ニ $|f(x)| \leq 1$ ナルカ、常ニ $|f(x)| \geq 1$ ナルカ何レカナルコトが判ル。

(1) $|f(x)| \leq 1$ ナルトキ

$f(0) = 1$ ナリ、シカモ原点ノ近傍ガ定符子ナル故、原点ノ近傍デ $f(x) > 0$ ナラシム。故ニ (F) ノ両辺ノ對數ヲトレバ

$$\log f(x+y) + \log f(x-y) = \log \left\{ \frac{f^2(x) + f^2(y)}{1-f^2(1-f^2(x))(1-f^2(y))} - 1 \right\}$$

$|f(x)| \leq 1$; 即チ $f(x)$ ハ有界ニシテ又可測ナル故、上式ノ両辺ヲ $0 < \lambda (\neq 0)$ ナリ、 $y = \lambda t$ ナリ λ Lebesgue 積分ニシテ $u = f(x)$ ト書ケバ

$$(3) \int_0^\lambda \log f(x+y) dy + \int_0^\lambda \log f(x-y) dy \\ = \int_0^\lambda \log \left\{ \frac{u^2 - f^2(y)}{1-f^2(1-u^2)(1-f^2(y))} - 1 \right\} dy$$

$$\equiv \int_0^\lambda F(u) dy$$

$$\text{次} = \varphi_n(u) = \frac{F(u + \frac{1}{n}) - F(u)}{\frac{1}{n}} \quad \text{トオケル}$$

$$|\varphi_n(u)| < M$$

トルコトが容易ニ判ル、コトニ M ハ u 及ビ n = 無関係ト数
テ得ル。

∴ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(u) = \frac{dF}{du}$ トル故、Lebesgue,
fundamental theorem = ∃

$$\frac{d}{du} \int_0^\lambda F(u) dy = \int_0^\lambda \frac{dF}{du} dy$$

トトル。

λ ヲ適當ニトスル。

$$\int_0^\lambda \frac{dF}{du} dy \neq 0$$

トラシテ得ルコトが判ル。

即チ λ ヲ適當ニトスル。

$$\frac{d}{du} \int_0^\lambda F(u) dy \neq 0$$

故ニ陰函数ノ定理 = ∃ (3) ノ右辺ヨリ $f(x) = \psi$ イテ、原
点ノ近傍デ一義的ニトイテ出セル。即チ G ハ連続函数ニシ
テ

$$f(x) = G \left\{ \int_0^\lambda \log f(x+y) dy + \int_0^\lambda \log f(x-y) dy \right\}$$

$$\text{しか} \in \int_0^{\lambda} f(x+y) dy + \int_0^{\lambda} f(x-y) dy, \quad \lambda < \infty, \text{連続函数ヲ}$$

ル故、 $f(x)$ ハ原点ノ近傍ヲ連続トナル。

$f(x)$ ガ連続トラバ上ノ証明ヲ再ビタドルコトニヨリ $f(x)$ ハ連続微分可能ナルコトガ判ル。

$f(x)$ ガ連続微分可能トラバ(F)ヲ一回微分シ、上述ノ論法ヲクリカヘセバ、 $f(x)$ ハ二回微分可能ナルコトガ容易ニ判ル。

又(F)ニ於テ $y = x$ トオフコトニヨリ $f(x)$ ハ偶函数ナルコトヲ知ル。

(F)ヲ $y = 0$ ニ関シテ二回微分シテ $y = 0$ トオフ $= f''(x)$ ガ偶函数ナルコトカラ $f'(0) = 0$, 又 $f''(0) = \alpha$ トスレバ

$$f''(x) f(x) - f'^2(x) - \alpha k^2 f^4(x) - \alpha(1-k^2) = 0$$

コノ微分方程式ヲ解イテ $|f(x)| \leq 1$ ニ適スルモノヲ求ムレバ

$$f(x) = cn[\alpha x; k] \quad (\alpha = \alpha \text{ハ任意ノ實數})$$

$$(G) \quad |f(x)| \geq 1 \text{ ナルトキ}$$

(F)ニ於テ $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ トオイテ φ ニ関スル函数方程式ニ置ケバ

$$(G) \quad \varphi(x+y)\varphi(x-y) = \frac{\varphi^2(x) + \varphi^2(y)}{1 - (1-k^2)(1-\varphi^2(x))(1-\varphi^2(y))} - 1$$

シカモ $|f(x)| \geq 1$ ナル故 $|\varphi(x)| \leq 1$ トナル。

(G)ナル函数方程式ハ(F)ナル函数方程式ニ於テ k^2 ノ代リニ $1-k^2$ ヲオイタダケテ得ル。($1 \geq \sqrt{1-k^2} \geq 0$)。

$f(x)$ が原点ノ近傍ヲ定符号ヲ可測トシバ $\varphi(x)$ モ原点ノ近傍ヲ定符号ヲ可測トル故、(G)ヨリ前ト全然同様ニシテ

$$\varphi(x) = \operatorname{cn}[ax; \sqrt{1-k^2}]$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{\operatorname{cn}[ax; \sqrt{1-k^2}]} \quad (\text{茲} = a \text{ノ任意, 實數})$$

結局求ムル解ハ

$$\pm \operatorname{cn}[ax; k], \pm \frac{1}{\operatorname{cn}[ax; \sqrt{1-k^2}]} \quad (\text{茲} = a \text{ノ}$$

實數, 實數) トナル。

之等ハ明ニ (F)ヲ満足セラル。

———— (完) ————