945. 標數 p ノ係數體ニ於ケル Gruppenring ニツイテ III

大島　　勝（高知高校）

I 及ビ II ニツイテ中山サンカラ、次ノヤウナ御教示ヲ受ケマシタカラ補足トシテ述ベマス。

即チ I ニ於ケル $\mathfrak{G}$ ガ位數 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{g}$ ヲモテバ Gruppenring Γ ガ Primär zerlegbar ナルコトノ證明ニ於テ Γ ノ構造ヲ用ヒナクトモ、Charakter 計算ニヨリ必要十分條件トモ一貫シテ證明出來ルコト。

次ニIIニ於テ $\overline{Z}_i$ ガスベテ既約ナルタメノ必要十分條件トシテ Γ ガ Primär zerlegbar デ $Sp(C)=n$ ナルコトヲ証明シテ，注意トシテ一般ニ $Sp(C)\geqq n$ ガ成立スルノデハナイカト書イテオキマシタ所、コレモ一般ノ場合ニ証明出来テ、且ツ $Sp(C)=n$ ナルトキハ $\overline{Z}_i$ ガスベテ既約ニナルコトヲ証明シテ頂キマシタ。從ツテスベテノ $\overline{Z}_i$ ガ既約ナルタメノ必要十分條件トシテハ単ニ $Sp(C)=n$ ダケデ良イコトニナリマス。

先ヅ最初ノ方ノ証明カラ、$\mathfrak{G}$ ガ位数 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{G}'$ ヲモテバ Block B_1 ハ Primär デアル (Braner-Nesbitt P. 587) F_k 及ビ U_k ノ Charakter ヲ $\varphi^{(k)}$, $\eta^{(k)}$ トスレバ $\eta^{(k)}$ ハ $\eta^{(1)}\times\varphi^{(k)}$ ノ中ニ含マレル. (Braner-Nesbitt P. 580 冒頭). シカルニ $\eta^{(1)}$ ハ B_1 ガ Primär ダカラ $\varphi^{(1)}$ ダケカラ成ツテキルコトカラ $\eta^{(1)}\times\varphi^{(k)}$ ハ $\varphi^{(k)}$ $(=1\times\varphi^{(k)}=\varphi^{(1)}\times\varphi^{(k)})$ バカリ、故ニ $\eta^{(k)}$ ハ $\varphi^{(k)}$ ノミカラ成ツテキル. コレガスベテノ k ニツイテ成立スルカラ，スベテノ Block ガ只一ツノ Mod. irred. Char. ヨリナリ Γ ガ Primär zerlegbar デアル。

$Sp(C)\geqq n$ ナルコトノ証明

$$C=D'D$$

コヽニ D ハ

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & F_1 & F_2 & \cdots & F_k & \cdots & F_k \\
\hline
Z_1 & & & & \vdots & & \\
Z_2 & & & & \vdots & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
Z_i & \cdots & \cdots & \cdots & d_{ik} & & \\
\vdots & & & & & & \\
Z_n & & & & & &
\end{array}
\quad , \quad d_{ik} \geqq 0
$$

故ニ

$$c_{kk} = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}^{2}$$

$$Sp(c) = \sum_{k}^{k} c_{kk}$$

$$= \sum_{k=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} d_{ik}^{2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{k} d_{ik}^{2}$$

各 i ニツイテ少クトモ一ツ $d_{ik} \neq 0$ ナル k ガアルカラ

$$\sum_{k=1}^{k} d_{ik}^{2} \geqq 1$$

モシ $d_{ik} \neq 0$ ナル d_{ik} ガ少クトモ二ツアルカ，或ヒハ $d_{ik} \geqq 2$ ナル k ガ少クトモ一ツアレバ．確カニ不等号ガ成立スル。

故ニ一般ニ

$$Sp(C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{k} d_{ik}^{2} \geqq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

等号ガ成立スルニハ，スベテノ i ニツイテ $d_{ik} = 1$,

$d_{i\lambda}=0$ $(\kappa \neq \lambda)$ ガ成立スルトキニ限ル．コノコトハ表現ノ方デ考ヘレバ

$$\bar{Z}_i \cong F_\kappa$$

ナルコトヲ示シテヰル．即チ $Sp(C)=n$ ナルトキハ，スベテノ $\bar{Z}_i$ ガ既約デアル．Block B_κ ニ屬スル Z_i ハ $\bar{Z}_i \cong F_\kappa$ ヲ満足スルモノノミカラナツテヰルコトモ明カデアル．

次ニ逆ノ方，即チスベテノ i ニツイテ $\bar{Z}_i$ ガ既約ナルトキハ $Sp(C)=n$ ナルコトヲ證明スル．

$$\bar{Z}_i \cong F_\kappa$$

トスレバ $d_{i\kappa}=1$, $d_{i\lambda}=0$ $(\kappa \neq \lambda)$．

従ッテ $Sp(C)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{k} d_{i\kappa}^2 = n$ トナル．

以上ヲマトメレバ

<u>定理</u>　$\mathfrak{G}$ ノ既約表現 Z_i ガ mod. field ニ移ッタトキスベテ既約ナルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ Cartan Invariants ノナス Matrix C ニツイテ

$$Sp(C)=n$$

ガ成立スルコトデアル．

$Sp(C)=n$ デアレバ，スベテノ i ニツイテ $d_{i\kappa}=1$ $d_{i\lambda}=0$, $(\kappa \neq \lambda)$ ナル故 $C=D'D$ ヨリ Matrix C ハ diagonal Matrix トナル．即チ Γ ハ Primär zerlegbar デアル．従ッテ $\mathfrak{G}$ ハ位数 g' ノ Normalteiler ヲモチ $\mathfrak{G}'$ ニ含マレル $\mathfrak{G}$ ノ共軛類ノ中，ソノ含

ム元ノ個数 g_k $(k=1,2,\cdots\cdots,h)$ ガ丁度 p^{α} デ割レル

モノノ個数ヲ m_α トスレバ

$$S_p(c)=\sum_{\alpha=0}^{a} m_\alpha p^{a-\alpha}$$

ナル故、上ノ定理ヲ群論的ニ云ヒナホセバ、II ニ述ベタ定理

ヲ得ルワケデアル。

(註)：大島氏ノコノ群論的 formulation ガ大変面白ク，上

記私ノ一寸オ手傳ヒシタ部分ハイハバ豫備ニスギマセ

ン。（中山）