951. Connected Vector-lattice 2

中野 秀五郎(東大)

IV. 前ノIIニテ bicompact Hausdorff space BニテノBounded continuous functions ノ Vector-lattice $\mathfrak{M}$ガ1ヲ含ミ、B内ノ二点ニテ相異ナル値ヲ有スル函数ヲ含ムトキ、次ノ定理ヲ証明シタ。

$\boxed{\text{定理4}}$ $\mathfrak{N}$ガ$\mathfrak{M}$ノ normal submodul ナル時ハ $\mathfrak{N}$ハBノ或 closed set E_0 ニテ0トナル総テノ$\mathfrak{M}$ノ函数ヨリナル。

然シ此ノ定理中ノ或ル closed set E_0 ナルモノガ如何ナルモノナルカニハ言及シナカッタ。勿論任意ノ

closed set デハ成立シナイ。即チ次ノ定理ガ成立ス。

定理 8 regular closed set E_0 ニテ 0 トナル総テノ $\mathfrak{M}$ ノ functions ハ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul デアツテ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul ハ此ノ如キモノニ限ル。

証明 $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul トスレバ、前ノ如クニシテ $\mathfrak{N}$ ノ総テノ function ニテ 0 トナル点ノ全体ヲ E_0 トスレバ E_0 ハ closed ニシテ、$\mathfrak{N}$ ハ E_0 ニテ 0 ナル総テノ $\mathfrak{M}$ ノ functions ヨリナルコトガ証明サレル。此ノ E_0 ハ實ハ regular デアル。如何トナレバ、$\mathfrak{N}$ ニ orthogonal ナ $\mathfrak{M}$ ノ function $g(x)$ ハ

$$g(x) = 0 \quad \text{in} \quad B - E_0$$

トナル。故ニ又 $g(x)$ ハ continuous ナルニヨリ

$$g(x) = 0 \quad \text{in} \quad \overline{B - E_0}$$

故ニ $\mathfrak{N}$ ノ functions ハ $\overline{B - (\overline{B - E_0})}$ ニテ 0 トナル総テノ $\mathfrak{M}$ ノ function ヲ含ム。從ツテ

$$E_0 = \overline{B - (\overline{B - E_0})}$$

即チ E_0 ハ regular デアル

逆ニ E_0 ガ regular closed set ナレバ E_0 ニテ 0 トナル $\mathfrak{M}$ ノ functions ハ normal submodul ヲナス。如何トナレバ E_0 ニテ 0 トナル functions ニ orthogonal ナ functions ハ $\overline{B - E_0}$ ニテ 0 トナル functions ニシテ此ノ如キ functions ニ orthogonal ナル functions ハ又 $\overline{B-(\overline{B-E_0})}$ ニテ 0 トナル。即チ E_0 ニテ 0 トナル functions デアル。

V. 次ノ bicompact Hausdorff space B ニテ Bounded continuous functions 全体ヲ $\mathfrak{M}$ トシタトキ、$\mathfrak{M}$ ガ complete デアルタメノ條件ヲ考ヘヨウ。先ヅ B ガ discontinuous (totally disconnected) ナルコトハヨク知ラレテヰル。然シ此ノ條件ハ充分デハナイ。例ヘバ B ヲ $\{\pm\frac{1}{n}, 0\}$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$) ナル実数ノ集合トスレバ、B ハ明カニ bicompact Hausdorff space デ totally disconnected デアル。

然シ

$$f_n(x)=\begin{cases} 1 & x \geqq \frac{1}{n} \\ 0 & x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

ナル function ハ B デ continuous デハアルガ、l. u. b $f_n(x)$ ナル continuous function ノ存在シナイ事ハ明カデアル。故ニコノ場合ハ $\mathfrak{M}$ ハ complete デハナイ。

$\boxed{\text{定理 9}}$ $\mathfrak{M}$ ガ complete ナタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ、B ニ於ケル regular closed set ガ悉ク open ナルコトナリ。

$\boxed{\text{証 明}}$ 先ヅ $\mathfrak{M}$ ガ complete トスル。然ルトキハ任意ノ regular closed set E ニ對シテ、定理

ヨリ E ニテ 0 ナル continuous functions ハ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul デアル。然ルニ Bochner-Phylips (Annals) ニヨリ $\mathfrak{M}$ ガ complete ナルトキハ normal submodul ハ complemented デアルニヨリ、前ノ定理5 ニヨリ E ハ open トナル。

次ニ B ノ regular closed set E ガ悉ク open トスル。今 $\{f(x)\}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ functions ノ system ニシテ、且ツ $f(x) \geqq 0$ ナリトス。g. l. b. $\{f(x)\}$ ノ存在ヲ証明スレバ、$\mathfrak{M}$ ガ complete トナル。

$E(x : f(x) > \alpha)$ ナル点集合ハ open デアル。今

$$E_\alpha = \sum_{f(x)} E(x : f(x) > \alpha)$$

ト置ケバ、E_α ハ明カニ open set デアル。又 closure $\overline{E}_\alpha$ ハ regular closed set ナルニヨリ假定ニヨリ open 且ツ closed デアル。今

$$g(x) = \alpha \quad in \quad \prod_{\varepsilon > 0} (\overline{E}_\alpha - \overline{E}_{\alpha+\varepsilon})(\overline{E}_{\alpha-\varepsilon} - \overline{E}_\alpha)$$

ト置ケバ $g(x)$ ハ continuous デアル。如何トナレバ

$$E(x : g(x) > \alpha) = \sum_{\varepsilon > 0} \overline{E}_{\alpha+\varepsilon} \quad open$$

$$E(x : g(x) < \alpha) = \sum_{\varepsilon > 0} (B - \overline{E}_{\alpha-\varepsilon}) \quad open$$

ナルヲ以テナリ。又

$$E(x: g(x) > \alpha) = \sum_{\varepsilon>0} \overline{E}_{\alpha+\varepsilon} \supset E(x: f(x) > \alpha)$$

ナル ヲ以テ

$$g(x) \leqq f(x)$$

トナル。今 continuous function $h(x)$ ガ

$$h(x) \leqq f(x)$$

ナリトスル。$\varepsilon > 0$ ニ對シ

$$E(x: h(x) > \alpha) \supset E(x: h(x) \geqq \alpha+\varepsilon)$$
$$\supset E(x: f(x) > \alpha+\varepsilon)$$

故ニ

$$E(x: h(x) \geqq \alpha+\varepsilon) \supset \sum_{f(x)} E(x: f(x) > \alpha+\varepsilon)$$
$$= E_{\alpha+\varepsilon}$$

從ッテ

$$E(x: h(x) \geqq \alpha+\varepsilon) \supset \overline{E}_{\alpha+\varepsilon}$$

故ニ

$$E(x: h(x) > \alpha) \supset \sum_{\varepsilon>0} \overline{E}_{\alpha+\varepsilon} = E(x; g(x) > \alpha)$$

即チ $h(x) \leqq g(x)$. 故ニ $g(x) = g.l.b.\ f(x)$ ナリ。