952. Connected Vector-lattice 3

中野秀五郎(東大)

VI. 此ノ前ハ bicompact Hausdorff space B デ continuous bounded + function 全体ノ Vector-lattice $\mathfrak{M}$ ガ complete ナタメノ必充條件トシテ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル regular closed set ガスベテ open ナルコトヲ証明シタ。此処デハ $\mathfrak{M}$ ガ σ-complete ナ為ノ條件ヲ與ヘヨウ。

定義　F_σ ナル open set ノ closure ヲ σ-regular closed set ト云フコトニスル。F_σ トハ closed set ノ高々可附番個ノ和ノ意味デアル。

定理　$\mathfrak{M}$ ガ σ-complete ナタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ、space B ノ σ-regular closed set ガ悉ク open ナルコトナリ。

証明　証明ハ complete ノ場合ト大体同様デハアルガ、此ノ度ハ Bochner-Phylips ノ定理ヲ用フルコトガ出来ナイ。

先ヅ、$\mathfrak{M}$ ガ σ-complete トスル。今 B 内ノ任意ノ σ-regular closed set ヲ M トスル。然ル時ハ定義ヨリ

$$M = \overline{O} \qquad O = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \qquad (F_i \text{ closed})(O \text{ open})$$

ナル形ニテ表ハサル。

Bハ当然 normal デアルカラ Uryson ノ定理デ

$$f_i(x)=\begin{cases}1 & \text{in } B-O\\ 0 & \text{in } F_i\end{cases}$$

$$0\leqq f_i(x)\leqq 1$$

ナル continuous function $f_i(x)$ ガ存在スル。

$\mathfrak{M}$ ガ σ-complete ナルニヨリ

$$f(x)=g.l.b.\ f_i(x) \qquad (\text{lattice ノ意味デ})$$

ナル $f(x)$ ガ $\mathfrak{M}$ 内ニ存在ス。先ヅ $0\leqq f(x)\leqq f_i(x)$ ヨリ

$$f(x)=0 \qquad \text{in } O$$

ヲ得ル。$f(x)$ ガ継續ナルニヨリ、又

$$f(x)=0 \qquad \text{in } M=\overline{O}$$

デナケレバナラヌ。次ニ

$$f(x)=1 \qquad \text{in } B-M$$

ヲ証明スル。若シ

$$0\leqq f(x_0)<1 \qquad x_0\in B-M$$

ナル x_0 ガ存在シタトスレバ Uryson ノ定理デ

$$g(x_0)=1$$

$$g(x)=0 \qquad \text{in } M$$

$$0\leqq g(x)\leqq 1$$

ナル continuous function $g(x)$ ガ存在スル。

然カモ、明カニ

$$g(x)\leqq f_i(x)$$

故ニ

$$f(x) < f(x) \smile g(x) \leqq f(x)$$

トナリテ矛盾スル。故ニ

$$f(x) = 1 \quad in \ B-M$$

従ツテ B−M ハ closed デナケレバナラヌ。即チ M ハ open デアル。

逆ハ complete ノ場合ト同様デアル。

即チ、スベテノ σ−regular closed set ガ open トスル。今 $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq \cdots\cdots \geqq 0$ ヲ continuous functions トスル。任意ノ正数 α ニ對シ

$$E(x: f_i(x) > \alpha)$$

ハ open set デ、然カモ

$$E(x: f_i(x) \geqq \alpha + \frac{1}{n}) \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル。可附番個ノ closed set ノ sum ナリ。

故ニ，又

$$E_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} E(x: f_i(x) > \alpha)$$

モ可附番個ノ closed set ノ sum デアル．即チ F_σ ナル open set デアル。然ルトキハ

$$f(x) = \alpha \quad in \prod_{\varepsilon > 0} (\bar{E}_{\alpha-\varepsilon} - \bar{E}_{\alpha+\varepsilon})$$

ト置ケバ $\bar{E}_\alpha$ ハ open 且ツ closed ナルニヨリ complete ノ場合ト同様ニシテ

$$f(x) = g.l.b.\ f_i(x) \quad (\text{lattice ノ意味})$$

ガ證明サレル。

次ニ $\mathfrak{M}$ ガ σ-complete デハアルガ complete デナイ例ヲ擧ゲル。

例. Bヲ可附番個以上ノ点ヨリナル集合トスル。B内ノ特定ノ一点ヲ ∞ トスル。∞ 以外ハ皆孤立点。∞ ノ Umgebung ハBヨリ ∞ 以外ノ高々有限個ノ点ヲ除イタ集合全体トスル。然ルトキハBハ bicompact Hausdorff space デアル。Bデ continuous ナ function $f(x)$ トハ、可附番個ノ点ヲ除イテ constant ニシテ $f(\infty)$ ニ等シク。除カレタ可附番個ノ点デハ $f(x_i) \longrightarrow f(\infty)$ デアルガ如キ function ナリ。コノ場合 $\mathfrak{M}$ ハ σ-complete デアルガ complete デハナイコトハ明カデアル。

又コノ例カラ知レル如ク Bochner-Phylips (Annals 1941) ノ定理、即チ normal submodul ハ complementary デアル。ハ成立シナイ。例ヘバ $B - \infty = B_1 + B_2$ ナル disjoint ナ可附番以上ノ集合ノ和トシテ表ハセバ

$$f(x) = 0 \quad \text{in} \quad B_1, \infty$$

ナル continuous functions ノ全体ハ normal submodul デハアルガ complementary デハナイ。

然シ私ノ定義シタ Projection ハ存在スル。(學士

院1940)．如何トナレバーツノ continuous function $f(x)$ = orthogonal + continuous function ハ、$f(x) \neq 0$ ナルスデ 0 ニナル function ナリ。然ルニ $f(x) = 0$ ナル x ノ全体ハ有限個ノ点カ、或ハBヨリ有限個ヲ除イタモノデ、之レハ σ-regular closed set ガアッテ然カモ open ガアル。次ニⅡニ於ケル定理ニヨリ $f(x)$ = orthogonal + function 全体ハ complementary ナリ。

故ニ私ノ定義シタ Projection ハ σ-complete ノ場合ニハ Bochner-Phylips ノ様ナ拡張ハ出来ナイ。

(1941. 7. 20. 札幌ニテ)